1. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Opakování – matka moudrosti, sestra biflování

Optimalizační metody se zabývají studiem a aplikací lineárního programování. Než se do něj pustíme, bude se nám hodit oprášit znalosti z jiných předmětů, jako třeba:

Lineární algebra

PŘÍKLAD PRVNÍ Vyřešte Gauss-Jordanovou eliminací následující systém rovnic:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + w &= 0 \\ 2x + 4y + z + 2w &= 0 \\ x + 2y - 2z + w &= 0 \\ 5z &= 0 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD DRUHÝ Vyřešte grafickou metodou následující systém nerovnic:

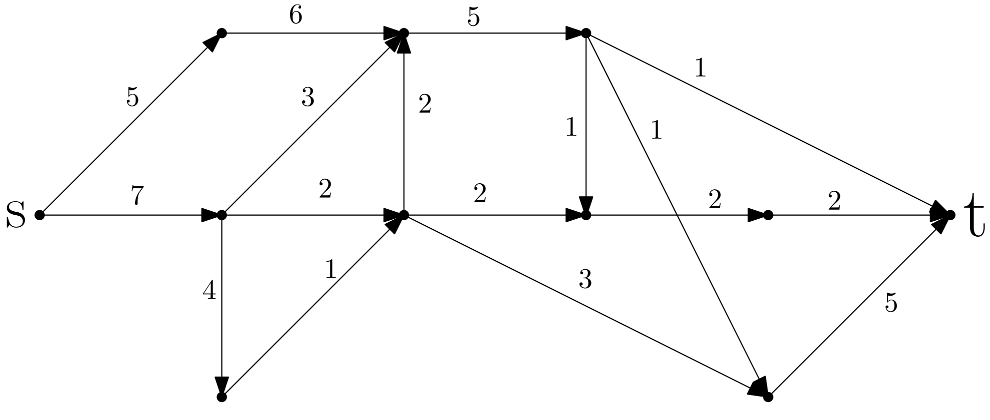
$$\begin{aligned} x + y + z &\geq 2 \\ x + y + z &\leq 2 \\ x + 2y - z &\leq 10 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

Nalezněte speciálně ta řešení, která maximalizují proměnnou x, resp. y, resp. z.

Nápověda: Řešením grafickou metodou prostě myslíme „nakreslete množinu řešení určenou polorovinami na papír a rozhodněte, jestli je neprázdná (systém nemá řešení), jednobodová, omezená nebo neomezená.“

Algoritmy a datové struktury

PŘÍKLAD TŘETÍ Nalezněte minimální s, t-řez pro následující ohodnocený orientovaný graf:



PŘÍKLAD ČTVRTÝ Mějme problém VERTEX COVER, zadaný následovně:

Vstup: Neorientovaný graf G.

Hledáme: množinu vrcholů X takovou, že každá hrana $e \in E(G)$ má alespoň jeden koncový vrchol v množině X. Ze všech takových množin X hledáme tu co do velikosti minimální.

Nalezněte 2-aproximační algoritmus pro VERTEX COVER.

Kombinatorika a grafy

PŘÍKLAD PÁTÝ Mějme neohodnocený bipartitní graf G_1 a neohodnocený libovolný graf G_2. Jakým algoritmem najdeme maximální párování v G_1? A v G_2? Zkuste si vzpomenout na rozumné algoritmy pro oba tyto problémy, a když se podaří, tak i na jejich složitost.

Formulace LP.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Pekárna peče chleby, housky, bagety a koblihy. K upečení jednoho chleba potřebuje půl kila mouky, 10 vajec a 50 g soli. Na jednu housku je zapotřebí 150 g mouky, 2 vejce a 10 g soli. Na bagetu potřebuje 230 g mouky, 7 vajec a 15 g soli. Na jednu koblihu je třeba 100 g mouky a 1 vejce. Pekárna má k dispozici 5 kilo mouky, 125 vajec, a půl kila soli. Za jeden chleba získá pekárna 20 korun, za housku 2 koruny, za bagetu 10 korun a za koblihu 7 korun. Pekárna se snaží vydělat co nejvíce. Jak ale zjistí kolik chlebů, housek, baget a koblih má upéct?

PŘÍKLAD SEDMÝ

Část 1. Mějme systém lineárních nerovnic, který obsahuje i ostré nerovnosti, kupř. tento:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &\leq 8 \\ 2x - 5z &< -3 \\ 6x + 5y + 2w &= 5 \\ 3z + 2w &> 5 \\ x, y, z, w &\geq 0 \end{aligned}$$

Lze pomocí lineárního programování zjistit, zda takovýto systém má přípustné řešení?

Část 2. Můžeme tedy řešit lineární programy s ostrými nerovnostmi? Obecně ne. Jako příklad zkonstruujte „LP s ostrými nerovnostmi“, který:

- má (triviální) konečný horní odhad na hodnotu optima,
- má přípustné řešení a
- nemá optimální řešení.

Toto se pro lineární program nemůže stát – pokud je LP omezený a existuje přípustné řešení, tak také existuje optimální řešení.

PŘÍKLAD OSMÝ Mějme LP v nestandardním tvaru: $\max c^T x$ takové, že $Ax \leq b$, ale $x \in \mathbb{R}^n$, ne pouze $x \geq 0$. Je možné tento program převést na ekvivalentní program ve standardním tvaru tj. $\max d^T x'$ takové, že $A'x' \leq b'$ a $x' \geq 0$?