2. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Formulace LPček a IPček

Příklad první S pomocí znalostí z přednášky rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- Každá úloha LP (polynomiální velikosti) je řešitelná v polynomiálním čase.
- Každá úloha IP (polynomiální velikosti) je NP-těžká.
- Každou úlohu LP můžeme převést na ekvivalentní tvar, který v podmínkách obsahuje pouze rovnosti.
- Pokud úloha LP nemá maximalizační klauzuli, jde ji převést na rovnicový tvar a vyřešit Gaussovou eliminací.

Příklad druhý Pro každý zadaný problém navrhněte lineární nebo celočíselný program, který jej řeší. (Pokud přijdete na lineární program, je to určitě lepší, ale nejde to vždy.)

- (Dopravní problém jinak.) V Kocourkově je n pekáren a m obchodů. Každý den i-tá pekárna upeče p_i rohlíků a j-tý obchod prodá o_j rohlíků. Převoz jednoho rohlíku z i-té pekárny do j-tého obchodu stojí c_{ij} korun.
  Jenže! Praxe v Kocourkově ukázala, že když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí l_{ij}. Logistiku l_{ij} je nutné platit pouze tehdy, když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné c_{ij}.
  Nalezněte takovou distribuci rohlíků, aby se každá pekárna zbavila všech rohlíků, každý obchod získal (právě) potřebný počet rohlíků a celkové náklady na převoz byly minimální.
- (Prokládání přímkou.) Máme n bodů v rovině. Najděte přímku (resp. souřadnice přímky), která minimalizuje sumu verikálních vzáleností bodů od výsledné přímky. Vertikální vzdálenost je vzdálenost měřena pouze na ose y.
  Pro jednoduchost předpokládejte, že výsledná přímka není kolmá na osu x.
- (Nejkratší cesta.) Pro zadaný neohodnocený orientovaný graf G a dva vyznačené vrcholy s, t navrhněte lineární program, který spočítá délku nejkratší cesty z s do t.

Příklad třetí Mějme zadanou matici A, vektor b a lineární funkci f. Z nich můžeme postavit třeba tento celočíselný program C:

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \le b \\ x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

Můžeme z nich ale postavit také následující lineární program L:

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \le b \\ x \in [0,1]^n \end{aligned}$$

Předpokládejme, že oba programy jsou řešitelné. Pojmenujme jedno optimální řešení celočíselného programu x^*_C a jedno optimální řešení lineárního programu x^*_L. Dokažte, že platí následujíci nerovnost:

$$c^T x^*_C \le c^T x^*_L.$$

Příklad čtvrtý NP-těžký problém Vážené vrcholové pokrytí je zadaný následovně:

Vstup: Neorientovaný graf G s nezápornými reálnými vahami na vrcholech, zadaných funkcí $w : V(G) \to \mathbb{R}^+_0$.

Cíl: Najít podmnožinu vrcholů S takovou, že každá hrana $e \in E(G)$ má alespoň jeden koncový vrchol v S (říkáme, že vrchol *pokryje* tuto hranu, odtud vrcholové pokrytí).

Ze všech takových podmnožin S hledáme tu, která ma *nejmenší váhu*, čili nejmenší součet $\sum_{s \in S} w(s)$.

Navrhněte celočíselný program s proměnnými $x \in \{0,1\}$, který najde optimální řešení problému VÁŽENÉ VRCHOLOVÉ POKRYTÍ.

PŘÍKLAD PÁTÝ

Minule jsme na cvičení ukazovali 2-aproximaci neváženého vrcholového pokrytí. Zkuste vymyslet, jak využít předchozích dvou příkladů k tomu, abychom našli 2-aproximaci problemu VÁŽENÉ VRCHOLOVÉ POKRYTÍ.

PŘÍKLAD ŠESTÝ

Student Josef K. dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujíciho, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$*, kde* $f : E \to \mathbb{R}_0^+$*, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou.*

Josef K. navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in \{0,1\}$, cílová funkce je $\min \sum_{uv \in E} f(uv) x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{i | ui \in E} x_{ui} = 2$.“

Funguje řešení Josefa K.? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

PŘÍKLAD SEDMÝ

1. Nalezněte matici $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ se všemi čísly mezi $[-10, 10]$ takovou, že Gaussova eliminace (převod na trojúhelníkovou matici) v nějakém kroku nebo na konci vytvoří číslo velké exponenciálně, čili $\Omega(2^n)$.
2. Mejme celočíselnou matici $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ se všemi čísly v intervalu $[-k, k]$. Zkuste vymyslet odhad na velikost dvojkového zápisu determinantu matice B. Je velikost zápisu tohoto čísla v dvojkové soustavě polynom, nebo exponenciela v n?
3. *Z přednášky:* Navrhněte, jak lze zajistit, aby Gaussova eliminace byla opravdu polynomiálnii tedy i ve velikosti čísel na vstupu.