

3. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Linearita, konvexita, afinita

Příklady naleznete na zadní straně.

D: Množina $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinní prostor*, pokud A je tvaru $L+v$ pro nějaký lineární prostor L a posuvný vektor $v \in \mathbb{R}^d$. Tvrzením „ A je tvaru $L+v$ “ se myslí bijekce mezi vektory z L a vektory A zadaná jako $b(u) = u + v$. *Dimenze* afinního prostoru A je rovna dimenzi jeho přidruženého lineárního prostoru L .

D: Vektor x je *afinní kombinací* konečné množiny vektorů a_1, a_2, \dots, a_n pokud $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, kde α_i jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Množina bodů/vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není afinní kombinací ostatních.

D: Pokud máme množinu vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$, můžeme uvažovat její *afinní obal*, což je množina všech vektorů A , které jsou afinní kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V .

Podobně jako lineární prostory, i afinní prostory mají konečnou bázi, takže nemusíme uvažovat všechny konečné podmnožiny pro generování afinního obalu – stačí generovat afinní kombinace báze.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v \mathbb{R}^d dimenze $d-1$. V rovine tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd.

Nadrovina rozděluje prostor \mathbb{R}^d na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

D: Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ se nazývá *konvexní množinou*, pokud $\forall x, y \in K, \forall t \in [0, 1] : tx + (1-t)y \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K musí mít každý bod obsažený v K .

D: Vektor x je *konvexní kombinací* množiny vektorů a_1, a_2, \dots, a_n pokud $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, kde α_i jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ a navíc $\forall i : \alpha_i \in [0, 1]$.

Množina bodů/vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *konvexní poloze*, pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není konvexní kombinací ostatních.

D: Pro konvexitu můžeme také zadefinovat obal: Pokud máme množinu vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$, její *konvexní obal* je množina všech vektorů A , které jsou konvexní kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V .

Zde je opravdu myslet na každou konečnou podmnožinu; konvexní množiny totiž nemají vždy konečnou bázi.

D: *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v \mathbb{R}^d , který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru $\{x | Ax \leq b\}$ pro nějakou reálnou matici A a reálný vektor b .

Známe z lingebrů:

T: Každý lineární prostor dimenze k obsahuje k -vektorovou bázi. Takovou bázi dokonce můžeme najít *ortogonální* (nebo dokonce *ortonormální*) a stejně tak můžeme najít *ortogonální doplněk* této báze.

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Student Josef K. dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujícího, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou.

Josef K. navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je $\min \sum_{uv \in E} f(uv)x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{i|ui \in E} x_{ui} = 2$.“

Funguje řešení Josefa K.? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

PŘÍKLAD DRUHÝ Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R}^3 | x \geq 1 \& x \leq 2\}$. Převedte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

PŘÍKLAD TŘETÍ Dokažte následující ekvivalenci:

Množina $n + 1$ vektorů $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ v \mathbb{R}^d je afinně nezávislá právě tehdy, když množina n vektorů $v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0, \dots, v_n - v_0$ je lineárně nezávislá.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Alenka a Bob hrají hru. Alenka si vymyslí lineární nerovnost N v \mathbb{R}^3 , ale neřekne ji Bobovi. Bobovi jen řekne tři různé body b_1, b_2, b_3 v \mathbb{R}^3 , které tuto nerovnost splňují. Bob nyní musí říkat další body b_4, b_5, b_6, \dots , které také nerovnost splňují, a to do té doby, než to Alenku neomrzí a nepůjdou spolu skákat panáka.

Poradte Bobovi, jak má hrát, aby vyhrál.

PŘÍKLAD PÁTÝ

1. Mohou se dvě 2D roviny protínat v jednom bodě, pokud jsme v \mathbb{R}^4 ?
2. *Na rozmyslenou.* Mohou se dva 3D prostory (prostory dimenze 3) protínat v \mathbb{R}^5 v jednom bodě?

PŘÍKLAD ŠESTÝ

1. Dokažte, že každý afinní prostor jde vyjádřit jako průnik konečně mnoha (afinních) nadrovin.
2. Dokažte, že každou afinní nadrovinu lze vyjádřit jako množina řešení soustavy $\{x | c^T x = b\}$.

Nápověda: Kdykoli uvažujete o afinním prostoru, zkuste si jej posunout pomocí vektoru $-v$ zpátky do počátku a dále uvažujte jen přidružený lineární prostor L .

PŘÍKLAD SEDMÝ (*Hlavní chod cvičení!*) Dokažte následující ekvivalenci, která dává snadný algebraický popis afinních prostorů:

Množina $F \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní podprostor, právě když $F = \{x \in \mathbb{R}^d | Ax = b\} \neq \emptyset$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ a nějaký vektor $b \in \mathbb{R}^d$.

PŘÍKLAD OSMÝ Už víme, že množina K je konvexní, pokud do množiny patří všechny úsečky s dvěma konci v K . Dokažte podobný popis pro afinitu:

Množina A je afinní podprostor \mathbb{R}^d právě tehdy, když pro každé dva body $a, b \in A$ platí, že *přímka* určená body a, b je celá obsažena v A .