5. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Simplexová metoda

Pro připomenutí:

D: *Vrchol* mnohostěnu P je stěnou dimenze 0. *Hrana* P je stěnou dimenze 1. Nakonec *faseta* P je stěnou dimenze $d-1$. **D:** *Bazické řešení* je takové řešení soustavy $Ax \leq b$, které odpovídá regulární podmatici A' matice A.

Tedy hodnotu proměnných, které nejsou zastoupeny v A' nastavím na 0.

T(Bázická řešení jsou právě vrcholy konvexního mnohostěnu**)**:

Bod x_i je vrcholem konvexního mnohostěnu daného soustavou $Ax \leq b$ dimenze $d \Leftrightarrow x_i$ je bazické řešení soustavy $Ax \leq b$.

Tedy: Bod x_i patří do mnohostěnu (splňuje všechny nerovnice) a zároveň splňuje d lineárně nezávislých nerovností přesně (s rovností).

D: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d+1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d-dimenzionální simplex v $\mathbb{R}^d$ můžeme představit jako konvexní obal:

$$\operatorname{conv}(0,(0,0,\ldots,0,1),(0,0,\ldots,1,0),\ldots,(1,0,\ldots,0,0))$$

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Rozhodněte, jestli vrchol $v = (1,1,1,1)$ je vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nadrovin:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & -12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

PŘÍKLAD DRUHÝ Dokažte, že každý omezený konvexní mnohostěn dimenze d v $\mathbb{R}^d$ má alespoň $d+1$ vrcholů a alespoň $d+1$ faset.

PŘÍKLAD TŘETÍ Nalezněte všechny vrcholy mnohostěnu zadaného takto:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklady na simplexovou metodu:

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Převeďte příklad do rovnicového tvaru:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 3 \\
x_2 + x_3 &\leq 12 \\
x_1 + 3x_2 - x_4 &\geq -7 \\
x_5 &\geq 6 \\
x_2 + x_5 &\leq 13 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Nalezněte také nějaké bazické přípustné řešení pro zadaný rovnicový tvar. Zamyslete se při hledání nad tím, jestli už tvorbou rovnicového tvaru si můžeme pomoci v hledání.

PŘÍKLAD PÁTÝ Mějme zadaný následující problém:

$$
\begin{aligned}
\max x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & \\
x_1 - x_5 + x_6 &= 20 \\
x_1 + x_3 + x_7 &= 30 \\
x_1 + x_2 + x_4 + x_8 &= 10 \\
x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_9 &= 1 \\
x_1, x_2, \ldots, x_9 &\geq 0
\end{aligned}
$$

a počáteční bazické řešení $(0, 0, 0, 0, 0, 20, 30, 10, 1)$. Proveďte jeden krok simplexového algoritmu. Zdůvodněte, proč jste si vybrali ze všech možností právě tento.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Vyřešte následující optimalizační úlohu už celou: $\max 2x_1 - x_2 + 2x_3$ za podmínek:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 10 \\
x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 20 \\
x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

PŘÍKLAD SEDMÝ Nalezněte počáteční bazické přípustné řešení následující úlohy metodou „Uhodni řešení“ a poté si zkuste nalézt pocáteční bazické přípustné řešení metodou simplexového algoritmu:

$$
\begin{aligned}
\max 4x_2 - x_4 & \\
3x_1 + x_2 - 2x_4 &= 5 \\
-x_2 + x_3 &= -2 \\
-2x_1 + 8x_2 + x_3 &= 2 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Příklad osmý Aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Zkuste si nakreslit mnohostěn P a zdůvodnit, proč se algoritmus zastavil. Závisí tento problém na účelové funkci, nebo jen na mnohostěnu?

- Optimalizujte funkci $\max 3x_1 + x_2$ na mnohostěnu P:

$$\begin{array}{llll} x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ 2x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

- Optimalizujte funkci $\max 4x + 5y + 3z$ na mnohostěnu P:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &\geq 20 \\ x + 6y + 5z &\leq 50 \\ x + 3y + 5z &\leq 30 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad devátý Nalezněte příklad, kdy se simplexová metoda zacyklí. (Pro nějakou volbu pivotovacího pravidla)