6. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Simplex a opakování geometrie

Příklad první

Nalezněte počáteční bazické přípustné řešení následující úlohy metodou „Uhodni řešení“. Potom zkuste udělat 3 kroky hledání bazického přípustného řešení metodou simplexového algoritmu stejné úlohy. Podařilo se vám do 3 kroků najít přípustné řešení?

$$\begin{aligned} &\max 4x_2 - x_4 \\ &3x_1 + x_2 - 2x_4 = 5 \\ &-x_2 + x_3 = -2 \\ &-2x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Řešení Pokud bychom to řešili mecahnicky přidáním 3 pomocných proměnných-řešení dostaneme, ale po mnoha krocích a počítání komplikovaných zlomků.

Pokud však "uhodnete", že x_2 by mohlo být v bázi a přestože se vyskytuje i v dalších rovnicích, tak po dosazení do nich stále budou dávat přípustná (kladná) bazická řešení.

$$\begin{aligned} &\max -17 + 5x_1 - 8x_3 - 2x_4 \\ &a_1 = 3 - 3x_1 - x_3 + 2x_4 \\ &x_2 = 2 + x_3 \\ &a_3 = +14 - 2x_1 + 9x_3 \end{aligned}$$

Můžu přidat jen x_1

$$\begin{aligned} &\max -12 + 5x_1 - \frac{29}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 - \frac{5}{3}a_1 \\ &x_1 = 1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}a_1 \\ &x_2 = 2 + x_3 \\ &a_3 = +12 + \frac{25}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{2}{3}a_1 \end{aligned}$$

Můžu přidat jen x_4

$$\begin{aligned} &\max 0 + 5x_1 - \frac{4}{3}x_3 - a_1 - a_3 \\ &x_1 = 7 + \frac{23}{6}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{2}a_2 \\ &x_2 = 2 + x_3 \\ &x_4 = 9 + \frac{25}{4}x_3 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{3}{4}a_3 \end{aligned}$$

Dostanu tak přípustné řešení $(7, 2, 0, 9)$.

Pokud by se mi takové řešení podařilo uhodnout, tak pomocí něj mohu dokonce zvolit bázi a počáteční tabulku simplexu získat gausovou eliminací. Tedy do báze by přišli proměnné x_1, x_2 a x_3.

$$\begin{aligned} x_4 &= -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 &= 2 + x_3 \\ x_1 &= -1 + 4x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{aligned}$$

Po eliminaci:

$$\begin{aligned} x_4 &= 9 + \frac{29}{4}x_3 \\ x_2 &= 2 + x_3 \\ x_1 &= 7 + \frac{9}{2}x_3 \end{aligned}$$

Příklad druhý Aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Zkuste si nakreslit mnohostěn P a zdůvodnit, proč se algoritmus zastavil. Závisí tento problém na účelové funkci, nebo jen na mnohostěnu?

- Optimalizujte funkci $\max 3x_1 + x_2$ na mnohostěnu P:

$$\begin{array}{llll} x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ 2x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

- Optimalizujte funkci $\max 4x + 5y + 3z$ na mnohostěnu P:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &\geq 20 \\ 5x + 6y + 5z &\leq 50 \\ x + 3y + 5z &\leq 30 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

D: Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a zároveň $\exists x : c^T x = t$, označíme $\{x | c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* n_i konvexního mnohostěnu P.

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem $S = n_i \cap P$ pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P.

D: *Vrchol* mnohostěnu P je stěnou dimenze 0. *Hrana* P je stěnou dimenze 1. Nakonec *faseta* P je stěnou dimenze $d - 1$.

D: Řekneme, že konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud se vejde do koule s konečně velkým poloměrem. Pro dobrou intuici si stačí představit, že mnohostěn neutíká do nekonečna.

T(Vrcholový popis konv. mnohostěnů**):** Každý omezený konvexní mnohostěn je roven konvexnímu obalu všech svých vrcholů. Omezené mnohostěny tedy můžeme popsat buď pomocí všech poloprostorů (pak počítáme jejich průnik) nebo pomocí všech vrcholů (pak počítáme jejich konvexní obal).

T: Každá vlastní stěna mnohostěnu je průnikem faset.

D: *Bazické řešení* je takové řešení soustavy $Ax \leq b$, které odpovídá regulární podmatici A' matice A.

Tedy hodnotu proměnných, které nejsou zastoupeny v A' nastavím na 0.

T(Bázická řešení jsou právě vrcholy konvexního mnohostěnu**):**

Bod x_i je vrcholem konvexního mnohostěnu daného soustavou $Ax \leq b$ dimenze $d \Leftrightarrow x_i$ je bazické řešení soustavy $Ax \leq b$.

Tedy: Bod x_i patří do mnohostěnu (splňuje všechny nerovnice) a zároveň splňuje d lineárně nezávislých nerovností přesně (s rovností).

D: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d+1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d-dimenzionální simplex v $\mathbb{R}^d$ můžeme představit jako konvexní obal:

$$\mathrm{conv}(0, (0,0,\ldots,0,1), (0,0,\ldots,1,0), \ldots, (1,0,\ldots,0,0))$$

D: Jednotková d-dimenzionální *krychle* je konvexní obal všech 2^d bodů $\{0,1\}^d$. Krychlí rozumíme (osové) vložení jednotkové krychle (klidně nižší dimenze).

D: d-dimenzionální křížový mnohostěn je konvexní obal všech bodů $\pm e_i$ (pro $i \in 1,\ldots,d$), kde $(e_i)_j = 1$, pokud $i = j$ a 0 jinak. (Tedy ve třech dimenzích jsou to body $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(1,0,0)$ a $(-1,0,0)$.)

Příklad třetí

Dokažte nebo vyvraťte: Mějme d-dimenzionální simplex $S \subset \mathbb{R}^d$. Existuje nadrovina h taková, že průnik ani jednoho jí indukovaného (uzavřeného) poloprostoru s S není simplex (libovolné dimenze)?

Tip: Zkuste si nakreslit malé simplexy a odvodit to podle nich.

Příklad čtvrtý

Určete, kolik stěn dimenze k má d-dimenzionální simplex.

Příklad pátý

Spočítejte, kolik nadrovin je potřeba k určení d-dimenzionálního křížového mnohostěnu.

Příklad šestý

1. Zopakujte si, že stěna simplexu je sama simplexem.
2. Dokažte, že také každá stěna krychle je (posunutou) krychlí.
3. Platí obdobné tvrzení i pro křížový mnohostěn – tedy jsou fasety křížového mnohostěnu opět (posunuté) křížové mnohostěny?