7. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Dualita

D: Mějme lineární program s n proměnnými a m podmínkami

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0.$$

Pak jeho *duálem* nazveme nasledující lineární program s m proměnnými a n podmínkami:

$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0.$$

T(Slabá duální věta**):** Mějme maximalizační lineární program $\max c^T x$ a duální minimalizační program $\min b^T y$. Pak pro libovolné řešení x a libovolné řešení duálu y platí, že $c^T x \leq b^T y$.

Jinymi slovy, hodnota dualního řešení je horní odhad na hodnotu libovolného primárního řešení.

Původní program:	*V duálu bude:*
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
m podmínek n proměnných	m proměnných n podmínek
i-tá podmínka má $\leq$ i-tá podmínka má $\geq$ i-tá podmínka má $=$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	j-tá podmínka má $\geq$ j-tá podmínka má $\leq$ j-tá podmínka má $=$

Příklad první

Sestrojte duální úlohu k následující úloze:

$$\begin{aligned}
\max x_1 - 2x_2 + 3x_4 & \\
x_2 &\leq 0 \\
x_4 &\geq 0 \\
x_2 - 6x_3 + x_4 &\leq 4 \\
-x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\
6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &\geq 5
\end{aligned}$$

Příklad druhý

Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy Minimální vrcholové pokrytí pro vážený graf $G = (V, E, w)$. Pro připomenutí, uloha vypadá takto:

$$\begin{aligned}
\min \sum_{v \in V} w(v) x_v & \\
\forall e = (uv) \in E : x_u + x_v &\geq 1 \\
\forall v \in V : x_v &\geq 0
\end{aligned}$$

Příklad třetí

Zformulujte lineární program, který řeší úlohu Nejkratší s, t-cesta v neorientovanem neohodnocenem grafu. (Program si ve skutečnosti jen připomeňte, protože tuto úlohu už jsme měli na druhém cvičení.) Vysvětlete hlavní ideu Vašeho lineárního programu. Až budete mit daný lineární program, zkonstruujte k němu duál.

Doplňujicí otázka: Má i váš duální program nějakou hlavní ideu?

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Představme si zadaní lineárního programu, jehož řešení zatím neznáme:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0.$$

Pomocí duality zkonstruujte nový linearní program, který splňuje:

- neobsahuje účelovou funkci,
- ze souřadnic libovolného přípustného řešení jde vyčíst optimální řešení původního.

PŘÍKLAD PÁTÝ Dokažte, že pro každý lineární program L platí, že duál duálu L je původní program L.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:

Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.