8. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Totální unimodularita

D: Čtvercová matice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *unimodulární*, pokud její determinant je $-1, 0$ nebo 1.

D: Libovolná matice $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je *totálně unimodulární*, pokud determinant každé její čtvercové podmatice je roven $-1, 0$ nebo 1.

D: Mnohostěn nazveme *celočíselným*, pokud má všechny vrcholy celočíselné.

T(Cramerovo pravidlo**):** Mějme soustavu $Ax = b$, kde matice A má nenulový determinant. Potom soustava má jediné řešení, jehož i-tá souřadnice je rovna podílu determinantů

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

kde matice A_i vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem pravých stran.

T:Uvažme lineární program $\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0$. Nechť b je celočíselný vektor a A je totálně unimodulární matice. Pak je mnohostěn přípustných řešení celočíselný.

T(Důsledek předchozí věty**):** Uvažme celočíselný program $ILP = \max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}$ a jeho lineární relaxaci $LP = \max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0$. Pokud je b celočíselný vektor a A totálně unimodulární, pak vrcholové optimální řešení LP je optimálním řešením ILP.

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Zformulujte lineární program, který řeší úlohu NEJKRATŠÍ s, t-CESTA v neorientovanem neohodnocenem grafu. (Program si ve skutečnosti jen připomeňte, protože tuto úlohu už jsme měli na druhém cvičení.) Vysvětlete hlavní ideu Vašeho lineárního programu. Až budete mit daný lineární program, zkonstruujte k němu duál.

Doplňující otázka: Má i váš duální program nějakou hlavní ideu?

PŘÍKLAD DRUHÝ Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:

Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.

PŘÍKLAD TŘETÍ Nechť A je totálně unimodulární matice a nechť I je libovolně velká matice, která má v každém sloupci právě jednu jednotku a zbytek nuly. Dokažte následující:

- Dokažte, že A může obsahovat jen prvky 0, 1 nebo -1.
- Ukažte, že A^T, $\binom{A}{-A}$ a $(A|I)$ jsou totálně unimodulární matice.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Mějme zadanou matici X. Ověřte, jestli matice X je totálně unimodulární, bez použití následujícího příkladu.

$$\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

PŘÍKLAD PÁTÝ Mějme matici A velikosti $m \times n$, jejíž řádky jdou rozložit na dvě skupiny B a C. Nechť také platí:

- $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$,
- každý sloupec obsahuje nejvýše 2 nenulové hodnoty,
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A stejné znaménko, tak jeden řádek patří do B a druhý do C.
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A různé znaménko, tak oba rádky patří do B, nebo oba patří do C.

Všimněte si, že například matice z předchozího příkladu tyto podmínky splňuje.

Dokažte, že A je potom totálně unimodulární.

Tip: Dokazujte indukcí podle velikosti čtvercové podmatice. Začněte tím, že eliminujete případy, kdy v jednom sloupci je nejvýše 1 nenulová hodnota.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Dokažte, že každá matice incidence orientovaného grafu je totálně unimodulární.

PŘÍKLAD SEDMÝ Dokažte, že matice incidence grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní. Plyne z tohoto tvrzení snadné hledání celočíselnych řešení některých problémů?

PŘÍKLAD OSMÝ Nalezněte celočíselný mnohostěn $\{x;\ Ax \leq b, x \geq 0\}$, kde A je matice alespoň 3×3 a A i b jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?