

1. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Opakování lineární algebry – matka moudrosti a optimalizačních metod

Příklady naleznete na zadní straně.

D: Množina $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinní prostor*, pokud A je tvaru $L+v$ pro nějaký lineární prostor L a posuvný vektor $v \in \mathbb{R}^d$. Tvrděním „ A je tvaru $L+v$ “ se myslí bijekce mezi vektory z L a vektory A zadaná jako $b(u) = u + v$. *Dimenze* afinního prostoru A je rovna dimenzi jeho přidruženého lineárního prostoru L .

D: Vektor x je *afinní kombinací* konečné množiny vektorů a_1, a_2, \dots, a_n pokud $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, kde α_i jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Množina bodů/vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není afinní kombinací ostatních.

D: Pokud máme množinu vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$, můžeme uvažovat její *afinní obal*, což je množina všech vektorů A , které jsou afinní kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V .

Podobně jako lineární prostory, i konečné afinní prostory mají konečnou bázi, takže nemusíme uvažovat všechny konečné podmnožiny pro generování afinního obalu – stačí generovat afinní kombinace báze.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v \mathbb{R}^d dimenze $d - 1$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd.

Nadrovina rozděluje prostor \mathbb{R}^d na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

T: Každý lineární prostor dimenze k obsahuje k -vektorovou bázi. Takovou bázi dokonce můžeme najít *ortogonální* (nebo dokonce *ortonormální*) a stejně tak můžeme najít *ortogonální doplněk* této báze.

PŘÍKLAD PRVNÍ

Vyřešte Gauss-Jordanovou eliminací následující systém rovnic:

$$\begin{aligned}3x + 2y + 4z + w &= 0 \\2x + 4y + 2z + 2w &= 5 \\-x + 2y + 2z + w &= 7 \\4z &= 2\end{aligned}$$

Jak vypadá afinní podprostor řešení?

PŘÍKLAD DRUHÝ

- Jak velkou má bázi afinní prostor dimenze d ?
- Dokažte následující ekvivalenci:

Množina $n + 1$ vektorů $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ v \mathbb{R}^d je afinně nezávislá právě tehdy, když množina n vektorů $v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0, \dots, v_n - v_0$ je lineárně nezávislá.

Hint: Zaměřte se na afinní závislost.

PŘÍKLAD TŘETÍ

1. Dokažte, že každou afinní nadrovinu lze vyjádřit jako množinu řešení soustavy

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x = b\},$$

kde $c \in \mathbb{R}^d$ a $b \in \mathbb{R}$.

2. Dokažte, že každý afinní prostor konečné dimenze lze vyjádřit jako průnik konečně mnoha (afinních) nadrovin.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ (*Hlavní chod cvičení!*) Dokažte následující ekvivalenci, která dává snadný algebraický popis afinních prostorů:

Množina $F \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní podprostor, právě když $F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax = b\} \neq \emptyset$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ a nějaký vektor $b \in \mathbb{R}^d$.

PŘÍKLAD PÁTÝ

1. Mohou se dvě dvoudimenzionální roviny (prostě klasické roviny) protínat v jednom bodě, pokud jsme v prostoru \mathbb{R}^4 ?
2. Mohou se dva prostory dimenze 3 protínat v \mathbb{R}^5 v jednom bodě?

PŘÍKLAD ŠESTÝ

Vyřešte grafickou metodou následující systém nerovnic:

$$\begin{aligned}x + y + z &\geq 2 \\x + y + z &\leq 2 \\x + 2y - z &\leq 10 \\x &\geq 0 \\y &\geq 0 \\z &\geq 0\end{aligned}$$

Nalezněte speciálně ta řešení, která maximalizují proměnnou x , resp. y , resp. z .

Nápověda: Řešením grafickou metodou prostě myslíme: „nakreslete množinu řešení určenou polorovinami na papír a rozhodněte, jestli je neprázdná (systém nemá řešení), jednobodová, omezená nebo neomezená.“