3. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Formulace celočíselných LPček a jejich relaxace

Příklad první Vyřešte grafickou metodou následující systém nerovnic (čili LP):

$$\begin{aligned} -2x + 3y &\leq 3 \\ x + y &\leq 6 \\ -x + y &\geq -4 \\ x + 3y &\leq 12 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Pro účelové funkce:

a) max $x + y$
b) max $-3x + y$

Co se stane, když odebereme poslední dvě podmínky, tj. $x \geq 0, y \geq 0$?

Příklad druhý Celočíselné optimum $\leq$ neceločíselné optimum (při maximalizaci):

Mějme zadanou matici A a vektory b a c. Z nich můžeme postavit třeba tento celočíselný program C: $\max c^T x$ za podmínek $Ax \leq b$ pro $x \in \{0,1\}^n$.

Můžeme z nich ale postavit také následující lineární program L: $\max c^T x$ za podmínek $Ax \leq b$ pro $x \in [0,1]^n$.

Předpokládejme, že oba programy jsou řešitelné a mají optimální řešení. Pojmenujme jedno optimální řešení celočíselného programu x^*_C a jedno optimální řešení lineárního programu x^*_L. Zdůvodněte, že platí následujíci nerovnost:

$$c^T x^*_C \leq c^T x^*_L.$$

Příklad třetí NP-těžký problém Vážené vrcholové pokrytí je zadaný následovně:

Vstup: Neorientovaný graf G s nezápornými reálnými vahami na vrcholech, zadaných funkcí $w : V(G) \to \mathbb{R}^+_0$.

Cíl: Najít podmnožinu vrcholů S takovou, že každá hrana $e \in E(G)$ má alespoň jeden koncový vrchol v S (říkáme, že vrchol *pokryje* tuto hranu, odtud vrcholové pokrytí).

Ze všech takových podmnožin S hledáme tu, která ma *nejmenší váhu*, čili nejmenší součet $\sum_{s \in S} w(s)$.

Navrhněte celočíselný program s proměnnými $x \in \{0,1\}$, který najde optimální řešení problému Vážené vrcholové pokrytí.

Navíc zkuste vymyslet, jak využít předchozího příkladu k tomu, abychom našli 2-aproximaci zadaného problému.

Příklad čtvrtý Minimální vážené párování v bipartitním grafu:

Formulujte LP, který pro vážený bipartitní graf $G = (U, V, E, w)$ s partitami U a V, kde $w(e) \in \mathbb{R}$ je váha hrany e, nalezne perfektní párování minimální váhy.

Perfektní párování je množina hran taková, že každý vrchol je incidentní s právě jednou hranou, a váha párování je součet vah všech hran v párování.

Příklad pátý Student Tomáš Pilný dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujíciho, čili pro daný ohodnocený graf

$G = (V, E, w)$, kde $w(e) \geq 0$ je délka hrany e, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou. Hamiltonovská kružnice navštíví každý vrchol právě jednou.

Tomáš navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je min $\sum_{uv \in E} w(uv) x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{v | uv \in E} x_{uv} = 2$.“

Funguje toto řešení? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 14 dní od zadání.

TŘETÍ DOMÁCÍ ÚKOL **Dopravní problém.** **[2 body]**

V Kocourkově je n pekáren a m obchodů. Každý den i-tá pekárna upeče p_i rohlíků a j-tý obchod prodá o_j rohlíků. Převoz jednoho rohlíku z i-té pekárny do j-tého obchodu stojí c_{ij} korun.

Jenže! Praxe v Kocourkově ukázala, že když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí l_{ij}. Logistiku l_{ij} je nutné platit pouze tehdy, když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné c_{ij}.

Nalezněte takovou distribuci rohlíků, aby se každá pekárna zbavila všech rohlíků, každý obchod získal (právě) potřebný počet rohlíků a celkové náklady na převoz byly minimální.

ČTVRTÝ DOMÁCÍ ÚKOL **[1 bod]**

Mějme zadanou matici A a lineární program $Ax \leq 0, x \geq 0$. Vymyslete lineární program, pomocí kterého jde rozhodnout, jestli mnohostěn přípustných řešeních LP obsahuje pouze bod 0 nebo ne.

Tip: Budou se asi opět hodit triky s epsilony.