4. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Linearita, afinita, konvexita . . . prostě geometrie

Příklady naleznete na zadní straně.

D: *Afinní prostor* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je má tvar $L + v$ pro nějaký lineární prostor L a posuvný vektor $v \in \mathbb{R}^d$. Již víme, že jde určit pomocí soustavy rovnic $Ax = b$. *Dimenze* afinního prostoru A je rovna dimenzi jeho přidruženého lineárního prostoru L.

D: *Afinní kombinace* vektorů $a_1, a_2, \dots a_n$ je vektor $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, kde α_i splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

D: Množina bodů/vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není afinní kombinací ostatních.

D: *Afinní obal* $\mathrm{Aff}(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina všech afinních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d-1$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd. Nadrovinu určuje rovnice $c^T x = b$.

Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

D: Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ se nazývá *konvexní množinou*, pokud $\forall x, y \in K, \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K musí mít každý bod obsažený v K.

D: Vektor x je *konvexní kombinací* množiny vektorů $a_1, a_2, \dots a_n$ pokud $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, kde α_i jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ a navíc $\forall i : \alpha_i \in [0,1]$.

Množina bodů/vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *v konvexní poloze* („konvexně nezávislá“), pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není konvexní kombinací ostatních.

D: *Konvexní obal* $\mathrm{conv}(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina konvexních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V.

D: *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v $\mathbb{R}^d$, který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru $\{x | Ax \leq b\}$ pro nějakou reálnou matici A a realný vektor b.

D: Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a zároveň $\exists x : c^T x = t$, označíme $\{x | c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* n_i konvexního mnohostěnu P.

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem $S = n_i \cap P$ pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P.

D: *Vrchol* mnohostěnu P je stěnou dimenze 0. *Hrana* P je stěnou dimenze 1. Nakonec *faseta* P je stěnou dimenze $d-1$.

D: Řekneme, že konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud se vejde do koule s konečně velkým poloměrem. Pro dobrou intuici si stačí představit, že mnohostěn neutíká do nekonečna.

Příklad první *Z minula:* Student Tomáš Pilný dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujíciho, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, w)$, kde $w(e) \geq 0$ je délka hrany e, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou. Hamiltonovská kružnice navštíví každý vrchol právě jednou.

Tomáš navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je $\min \sum_{uv \in E} w(uv)x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{v|uv \in E} x_{uv} = 2$.“

Funguje toto řešení? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

Příklad druhý

- Víme, že v $\mathbb{R}^d$ je maximálně d lineárně nezávislých vektorů a maximálně $d+1$ afinně nezávislých vektorů. Kolik nejvýše je v $\mathbb{R}^d$ konvexně nezávislých vektorů?
- Jaký je počet stěn 3D krychle?

Příklad třetí Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor. Z definice je pak A tvaru $A = L + v$ pro nějaký lineární prostor L a nějaký vektor v. Dokažte, že existuje právě jeden lineární prostor $L \subseteq \mathbb{R}^n$ takový, že $A = L + v$ pro nějaký vektor v.

Charakterizujte všechny vektory v, které posunou lineární prostor L na afinní prostor A.

Příklad čtvrtý Vlastnosti polytopů:

- Uvažte váš oblíbený konvexní mnohostěn P a najděte dvě různé tečné nadroviny n_a, n_b, jejichž neprázdný průnik s P určuje tutéž stěnu.
- Mějme konvexní mnohostěn P. Dokažte, že průnik dvou stěn P je také stěna P.

Příklad pátý Už víme, že množina K je konvexní, pokud do množiny patří všechny úsečky s dvěma konci v K. Dokažte podobný popis pro afinitu:

Množina A je afinní podprostor $\mathbb{R}^d$ právě tehdy, když pro každé dva body $a, b \in A$ platí, že *přímka* určená body a, b je celá obsažena v A.

Příklad šestý Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1 \ \& \ x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 2 týdny od zadání.

Pátý domácí úkol **[2 body]**

Dokažte následující tvrzení. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Pro každý vektor $u \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathrm{Aff}(M) + u = \mathrm{Aff}(M + u)$ a $\mathrm{conv}(M) + u = \mathrm{conv}(M + u)$.
