6. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Simplexová metoda

Příklady naleznete na zadní straně.

T(Vrcholový popis konv. mnohostěnů**):** Každý omezený konvexní mnohostěn je roven konvexnímu obalu všech svých vrcholů. Omezené mnohostěny tedy můžeme popsat buď pomocí všech poloprostorů (pak počítáme jejich průnik) nebo pomocí všech vrcholů (pak počítáme jejich konvexní obal).

Pár hezkých mnohostěnů:

D: d-dimenzionální křížový mnohostěn je konvexní obal všech bodů $\pm e_i$ (pro $i \in 1, \ldots, d$), kde $(e_i)_j = 1$, pokud $i = j$ a 0 jinak. (Tedy ve třech dimenzích jsou to body $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$ a $(-1, 0, 0)$.)

D: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d + 1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d-dimenzionální simplex v $\mathbb{R}^d$ můžeme představit jako konvexní obal:

$$\operatorname{conv}(0, (0, 0, \ldots, 0, 1), (0, 0, \ldots, 1, 0), \ldots, (1, 0, \ldots, 0, 0))$$

Úloha LP v rovnicovém tvaru: max $c^T x$ za podmínek $Ax = b, x \geq 0$.

D:*Báze* je množina indexů proměnných $B \subseteq \{1, \ldots n\}$ taková, že A_B je regulární (A_B značí podmatici A indexovanou sloupci z B).

Bázické řešení x odpovídající B je řešení, pro které platí: $\forall i \notin B : x_i = 0$.

Přípustná báze je taková, že odpovídající bázické řešení je přípustné.

Příklad první   Převeďte LP do rovnicového tvaru s nezápornými proměnnými:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_2 + x_3 &\leq 12 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &\geq -7 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nalezněte také nějaké bazické přípustné řešení pro zadaný rovnicový tvar.

Máme-li libovolný lineární program s m lineárními nerovnicemi či rovnicemi a n proměnnými, kolik nejvýše může mít rovnicový tvar této úlohy proměnných?

Příklad druhý   Mějme zadaný následující problém:

$$\begin{aligned} \max x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & \\ x_1 - x_5 + x_6 &= 20 \\ x_1 + x_3 + x_7 &= 30 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_8 &= 10 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_9 &= 1 \\ x_1, x_2, \ldots, x_9 &\geq 0 \end{aligned}$$

a počáteční bazické řešení $(0, 0, 0, 0, 0, 20, 30, 10, 1)$. Proveďte jeden krok simplexového algoritmu. Zdůvodněte, proč jste si vybrali ze všech možností právě tento.

Příklad třetí   Vyřešte následující optimalizační úlohu už celou:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 - x_2 + 2x_3 & \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 20 \\ x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad čtvrtý   Nalezněte počáteční bazické přípustné řešení pomocí simplexového algoritmu (na jiném LP). Podařilo se vám ho najít do 3 kroků?

$$\begin{aligned} \max 4x_2 - x_4 & \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 &= 5 \\ -x_2 + x_3 &= -2 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 2 týdny od zadání.

Šestý domácí úkol **[3 body]**

Pomocí simplexové metody nalezněte nejprve přípustné bazické řešení a následně i optimální řešení následující úlohy:

$$\begin{aligned} \max 4x_1 + x_3 + x_4 \\ 8x_1 - 5x_3 - x_4 &= 40 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 24 \\ x_3 + x_5 &= 8 \\ x_6 - 2x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1, \ldots, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$