10. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Totální unimodularita a komplementarita

D(Volnost**):** Mějme soustavu lineárních nerovnic (S) a v ní j-tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor x'.

Pak *volnost* (slack) j-té nerovnosti vůči řešení x' je $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$. Pokud by nerovnost byla $\geq$, definujeme volnost jako $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i - b_j$, aby opět platilo $s_j^{(S)} \geq 0$ pro přípustná řesení.

T(Komplementarita**):** Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \tag{P}$$
$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu (x^*, y^*). Pak platí následující věta: Dvojice (x^*, y^*) je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon x_i^* \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \colon s_j^{(P)} \cdot y_j^* = 0. \tag{2}$$

Příklad první Josef K. opsal od souseda při písemce z Optimalizací přípustné řešení duálu a zadaní primálu. Primál je:

$$\begin{aligned} \max 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Přípustným řešením duálu je: $y = (4, 0, 0)$. Úloha se však ptala na to, je-li řešení duálu optimem nebo ne. Dořešte úlohu za Josefa.

Příklad druhý Pepička K. opsala od souseda při písemce z Optimalizací primál a optimální řešení duálu. Primálem je:

$$\begin{aligned} \min 10x_1 - 4x_2 \\ x_1 + 0.6x_3 + 4x_4 &\geq 43 \\ x_1 - x_2 + 0.6x_3 + 10x_4 &\geq 27 \\ x_1 - x_2 - 0.4x_3 - x_4 &\geq 24 \\ x_1 - x_2 - 0.4x_3 - 2x_4 &\geq 22 \\ x_1 + 3.6x_3 - 3x_4 &\geq 56 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Optimálním řešením duálu je $y = (3.36, 0, 0, 6.48, 0.16)$. Úloha se však ptala na optimální řešení původního programu. Dořešte úlohu za Pepičku s použitím komplementarity.

PŘÍKLAD TŘETÍ Pro LP a jeho duál z druhého příkladu nalezněte dvojici vektorů x a y takové, že platí

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon x_i \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \colon s_j^{(P)} \cdot y_j = 0. \tag{2}$$

ale x a y **nejsou** dvojicí optimálních řešení.

Tip: Najděte rozdíl mezi zadáním této úlohy a zadáním komplementarity.

Metoda řezů: Mějme mnohostěn $P = \{x | Ax \leq b, x \geq 0\}$, kde A i b jsou racionální.

D: Nechť nerovnice $\alpha^T x \leq \beta$ je platná nerovnice pro P. Pak nerovnici $\lfloor \alpha^T \rfloor x \leq \lfloor \beta \rfloor$ nazýváme platný řez.

Platný řez splňuje každý celočíselný bod mnohostěnu P. Obecný platný řez dostaneme sečtením nerovnic definujících mnohostěn vynásobených nezápornými čísly a zaokrouhlením koeficientů a pravé strany. Přesněji platný řez lze získat jako $\lfloor y^T A \rfloor x \leq \lfloor y^T b \rfloor$.

Následující věta říká, že přidáváním platných řezů dokážeme vytvořit jakoukoliv nerovnost platnou pro všechny celočíselné body P.

T: Nechť $P = \{x | Ax \leq b, x \geq 0\}$ je racionální mnohostěn a nechť $\alpha^T x \leq \beta, \alpha \in \mathbb{Z}^n, \beta \in \mathbb{Z}$ je nerovnost, kterou splňují všechna $x \in P \cap \mathbb{Z}^n$. Pak $\alpha^T x \leq \beta$ lze odvodit postupným přidáváním platných řezů k P.

Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 2 týdny od zadání.

OSMÝ DOMÁCÍ ÚKOL **[3 body]**

Pro graf $G = (V, E)$ uvažme relaxovaný lineární program pro perfektní párování:

$$\min \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e$$
$$\forall v \in V : \sum_{u \in V : uv \in E} x_{uv} = 1$$
$$\forall uv \in E : x_{uv} \geq 0$$

1. Pro každé $n \geq 3$ nalezněte souvislý graf na n vrcholech takový, že relaxovaný LP nemá přípustné řešení.
2. Dokažte, že pokud existuje $E' \subseteq E$ taková, že každá komponenta (V, E') je buď lichá kružnice nebo hrana, potom relaxovaný LP má přípustné řešení.
3. Dokažte, že pokud existuje přípustné řešení, pak existuje přípustné polo-číselné řešení, tedy řešení, které je má hodnoty proměnných 0, 1/2 a 1.