12. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Primárně-duální algoritmy

D: Mějme optimalizační problém a označme OPT hodnotu účelové funkce pro optimální řešení. Řekneme, že algoritmus A je *k-aproximační* pro daný problém, pokud A vrací přípustné řešení a hodnota účelové funkce tohoto řešení je $A \leq k \cdot OPT$ (to v případě, že maximalizujeme, pro minimalizaci chceme $OPT \leq k \cdot A$).

Pozorování: Pro každé řešení maximalizačního ILP a jeho LP relaxace platí, že $OPT_{LP} \geq OPT_{ILP}$, resp. $OPT_{LP} \leq OPT_{ILP}$ pro minimalizaci. **D(**Volnost**):** Mějme soustavu lineárních nerovnic (S) a v ní j-tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor x'.

Pak *volností* (slack) j-té nerovnosti vůči řešení x' rozumíme hodnotu $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$. Pokud by nerovnost byla $\geq$, definujeme volnost jako $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i - b_j$, aby opět platilo $s_j^{(S)} \geq 0$ pro přípustná řesení.

T(Komplementarita**):** Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \tag{P}$$
$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu (x', y'). Pak platí následující věta: Dvojice (x', y') je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

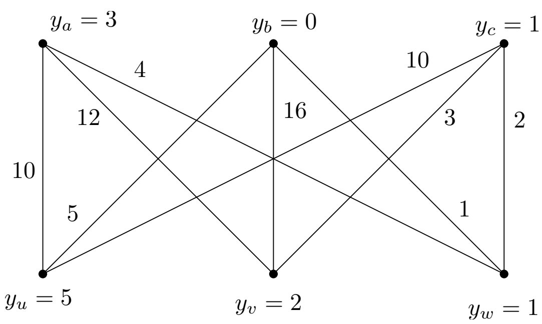
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\colon x'_i \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, m\}\colon s_j^{(P)} \cdot y'_j = 0. \tag{2}$$

Příklad první

Na začátku cvičení jste viděli 2-aproximační algoritmus pro Vážené vrcholové pokrytí, ve kterém se vygenerovala dvojice přípustných řešení (x, y). Tato dvojice přípustných řešení většinou nebude optimální, protože to je jen 2-aproximace. Zdůvodněte, které podmínky věty o komplementaritě budou porušeny.

Příklad druhý

Na obrázku je bipartitní graf, který má u hran napsané ceny a u vrcholů řešení duálního programu k perfektnímu párování minimální ceny. Dokažte, že toto řešení je optimální.



Dále se zkuste zamyslet, jaké různé možnosti máte pro dokázání, že dané řešení je optimální?

Příklad třetí

Primár:

$$\begin{aligned}\max -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 \leq 2 \\ x_i \geq 0\end{aligned}$$

Duál:

$$\begin{aligned}\min 3y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 \\ y_1 + 3y_2 - y_3 + y_4 \geq -2 \\ -y_1 + 2y_3 + 3y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ y_2 + 3y_3 - y_4 \geq 3 \\ y_i \geq 0\end{aligned}$$

Máte primár a duál. S pomocí komplementarity najděte optimum primáru, když víte, že optimum duálu je: $(0, 0, 1, 0)^T$.

Příklad čtvrtý Mějme LP pro hledání nejkratší cesty z bodu s do bodu t v grafu ohodnoceném nezápornými délkami cest jako $\{0, 1\}$-celočíselný program. Mějte podmínku pro každý s, t-řez v grafu. A jeho duál.

Primár:

$$\begin{aligned}\min \sum_{i=1}^{m} c_e x_e \\ \forall S\ s,t\text{-řez} : \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 \\ \forall e \in E : x_e \in \{0, 1\}\end{aligned}$$

Duál:

$$\begin{aligned}\max \sum_{S} y_S \\ \forall e \in E : \sum_{S\ s,t\text{-řez}: e \in \delta(S)} y_S \leq c_e \\ \forall S\ s,t\text{-řez} : y_S \geq 0\end{aligned}$$

Nyní uvažte následující algoritmus:

1. $\vec{y} \leftarrow 0$, kde y je vektor duálních proměnných.
2. $F \leftarrow \emptyset$ – nepřípustné řešení primálu.
3. Dokud neexistuje s, t-cesta v $G[F]$:
4. Uvažme (jedinou) souvislou komponentu C v grafu $G[F]$ obsahující s.
5. Zvyšujte hodnotu y_C, dokud nějaká podmínka (odpovídající e) nebude těsná.
6. Přidejte e do F.
7. Pro každé $e \in F$:
8. Pokud $G[F \setminus \{e\}]$ obsahuje s, t-cestu, tak odeber e z F.
9. Vrať F jako nejkratší s, t-cestu

Dokažte, že tento algoritmus najde nejkratší cestu.

Příklad pátý Minimum Steiner Forest (dále MSF) je následující problém: Máte neorientovaný graf $G = (V, E)$ s kladnými váhami na hranách $w : E \to \mathbb{R}^+$ a disjunktní množiny $S_1, S_2, \ldots, S_k \subset V$. Vaším úkolem je najít $F \subseteq E$ minimální váhy takovou, že každé dva vrcholy $u, v \in S_i$ (pro každé i) náleží do téže komponenty souvislosti $G[F]$. Zjevně F je acyklická a nazývá se Steiner Forest.

Formulujte MSF jako úlohu celočíselného programování, proveďte LP relaxaci této úlohy, nalezněte její duál a vypište primární a duální podmínky z věty o komplementaritě.

Poté zkonstruujte primárně-duální algoritmus pro MSF.
Hint: Algoritmus bude analogický algoritmu pro nejkratší cestu.
Nakonec si rozmyslete, že je to 2-aproximace.

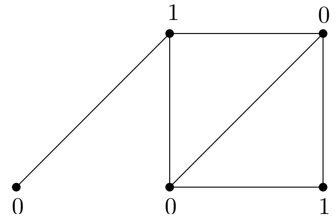
Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 2 týdny od zadání.

Devátý domácí úkol **[2 body]**

Na obrázku je zadán graf a u jeho vrcholů je přípustné řešení relaxovaného lineárního programu pro maximální nezávislou množinu:

$$\max \sum_{v \in V} x_v$$
$$\forall e \in E : x_u + x_v \leq 1$$
$$\forall v \in V : x_u \geq 0$$



S užitím komplementarity ověřte, jedná-li se o optimální řešení.