



Obrázek 1: Partie Domineeringu

# Kombinatorická teorie her

přednáší Mgr. Robert Šámal, Ph.D. a Mgr. Tomáš Valla

*1 hodina: Úvod*

## 1 Úvodní přehled

**Domineering - Dominování:**

- 2 hráči: Vodorovný a Svislý.
- Hráči kladou střídavě na šachovnici dominové kameny, tak aby se nepřekrývaly ani nepřesahovaly. Svislý pouze svisle, Vodorovný pouze vodorovně.
- Prohraje hráč, který už nemůže položit žádný kámen.

**Jak budeme analyzovat hry?** jednotlivým herním pozicím budeme přiřazovat čísla, či celé objekty ( př:  $\pm 1, *$  ). Také se budeme snažit upravit pro hry některé matematické operace. Třeba budeme hry sčítat. Později vybudujeme celou algebru her a zavedeme si zkoumané hry axiomatically.

**Jaké hry budeme vlastně zkoumat?** Hry které budou splňovat následující body:

- pro dva hráče.
- s úplnou informací. (tedy oba hráči pořád vědí o všem co se ve hře děje, příkladem hry bez úplné informace jsou třeba Žolíky)
- bez náhody.
- hráči se pravidelně střídají v tazích.
- pozice se neopakují. př: V šachách je například opakování stejných tahů ošetřeno remízou.
- kdo nemá tah prohrál (normální pravidlo), nebo kdo nemá tah vyhrál (misère neboli betl varianta).

**Jaké hry nebudeme zkoumat?** Nebudeme zkoumat matematickou teorii her (maticové hry) př: Kámen, nůžky, papír či Věžňovo dilema .

**Jak se o hře bavit?** Nakreslíme si herní strom. Z dané pozice jsou vždy v levých synech tahy Levého hráče a v pravých synech tahy pRavého hráče. Konkrétní instanci hry představuje cesta z kořene do listu. Všimneme si, že některé pozice jsou podobné a na sebe převoditelné. *Proč má smysl jít ve stromu vícekrát za sebou do stejného směru, tedy simulovat více tahů jednoho hráče za sebou?* Protože později dokážeme efektivně spojovat jednotlivé dílčí hry a tahy druhého hráče budou tím pádem simulovány v jiné části.

Nebo se o hře můžeme bavit jako o množině  $H = \{Left|Right\}$

**Cram - Cpaní (Dláždění):** Varianta na Domineering, jen oba hráči mohou pokládat kostky jak vodorovně, tak svisle.

### Klasifikace her

nestranné (impartial) – oba hráči mají stejné možnosti tahů př: Cram

zaujaté (partial) – každý hráč má specifické možnosti tahů př: Domineering, Šachy

#### Dots & Boxes:

- Hraje se na čtvercové šachovnici, bez políček, pouze s tečkami v rozích.
- Hráči spojují jednotlivé tečky a vždy, když některý z hráčů vytvoří čtverec (políčko pomyslné šachovnice), tak do tohoto políčka umístí svůj symbol a může táhnout ještě jednou.
- Vyhrává hráč s největším počtem bodů (neboli svých symbolů na šachovnici).

Nejedná se o klasickou kombinatorickou hru, protože neprohrává hráč co nemá tah, ale ten který získal méně bodů.

## 2 Příklady strategií

**Greedy - Hladová** Táhnout tak, abychom měli co největší lokální zisk. Dobrým příkladem úspěšné hladové strategie je hra, kdy se snažíme shromáždit co nejdražší předměty. Tedy předměty seřadíme a ve svém tahu vezmeme vždy ten nejdražší.

Mohla by být tedy první strategie, co nás napadne. A pokud nevíme o hře nic víc, je dobré ji použít a máme své jisté. Občas ale nemusí být optimální. př: Dots Boxes

**Symetrie** př: Hra na dělení čokolády na části o alespoň jedné straně sudé délky a nevytvoření dílku o velikosti  $1 \times 1$ . Vhodná strategie pro prvního hráče je zahrát doprostřed a poté symetricky kopírovat tahy soupeře.

př: Piškvorky  $5 \times 5$

**Ve skutečnosti je to jiná hra** Sem patří hry u kterých se dá najít nějaká ekvivalence (později formálně) na jinou jednoduchou a známou hru.

př: máme čísla od 1 do 9, hráči se střídají v odebírání a vyhrají, pokud na konci vlastní trojici se součtem 15. Jedná se v podstatě o hru piškvorky  $3 \times 3$ . To proto, že tato čísla jdou rozdělit tak, aby v každé diagonále, řádku i sloupci byl součet 15 a zároveň **neexistovala** jiná možnost, jak tohoto součtu dosáhnout.

př:  $n$  žetonů rozdělím na dvě neprázdné hromádky. Prohraji, když nemohu táhnout. Tato hra závisí pouze na paritě čísla  $n$ , což je hra Má mě ráda, nemá mě ráda (trhání okvětních plátků).

**Když začínám prohrávat?** Zahraj takový tah, abys vyvolal co největší zmatek a soupeři tím znepráhlednil hru.

**Strategy stealing – kradení strategií** př: Máme koláč a v levém dolním rohu jed. Hráči odkrajují po pravoúhlých kouscích a kdo sní jed, prohrál.

**Tvrzení 1.2.1—O strategy stealingu:** *V netriviálně velké hře má první hráč vyhrávající strategii.*

*Důkaz:*

Bud' provedu tah a mám vyhrávající strategii.

Nebo provedu tah a vyhrávající strategii má soupeř. Tak tuto strategii použiji ve svém prvním tahu a mám vyhrávající strategii já.

*Q.E.D.*

Jediný předpoklad, který k takovému tvrzení potřebuji, je možnost zahrát vždy svůj tah i tah soupeře v rámci jednoho svého tahu.

---

V Praze dne 30. ledna 2011 zapsal Tomáš Masařík. Na opravách spolupracoval Martin Koutecký. Verze 1.4