Kombinatorická teorie her

přednáší Mgr. Robert Šámal, Ph.D. a Mgr. Tomáš Valla

10 hodina: pokračování pozičních her

Hypergrafy Klasifikace hypergrafů dle her: (každý vrchol je obsažen alespoň v jedné vyhrávající linii)

0) Triviální výhra. (Ať první hráč hraje jak chce, tak vždy vyhraje.)

1) Neexistuje remízová pozice. (Všechny ramseyovsky velké hypergrafy, kde vyhrává první dle *strategy stealing.*)

2) Existuje remízová pozice, ale stejně první vyhraje silnou hru. (př: piškvorky 4^3)

3) Silná hra dopadne remzou, ale ve slabé hře vyhraje stavitel. (př: piškvorky 3^2)

4) Druhý se ubrání, ale neexistuje *párovací strategie.*

5) Existuje *párovací strategie* pro druhého hráče a tedy je taková hra remízová.

Otevřeným problémem zůstává, jestli jsou třídy 2 a 3 nekonečně velké.

Párovací strategie Nejdříve si připomeneme Hallovu větu.

Věta ***10.2.1—Hallova věta*** [1] **:** *Pro konečné množiny I a X máme konečný množinový systém $\mathcal{M} = M_i \subseteq X, \forall i \in I$, který má systém různých reprezentantů (SRR), tedy prostou funkci $f : I \to X$ tž. $\forall i \in I, f(i) \in M_i$. $\Leftrightarrow$ platí Hallova podmínka, tedy $\forall J \subseteq I : |\bigcup_{i \in J} M_i| \geq |J|$.*

Bez DK.

Co je SRR? Máme různé kluby, jejichž členské základny mohou mít neprázdný průnik, ale chceme mít na nějakém „zasedání předsedů“ jednoho zástupce za každý klub.

Lemma ***10.2.2—Dva systémy reprezentantů*****:** *Pro konečné množiny I a X máme konečný množinový systém $\mathcal{M} = M_i \subseteq X, \forall i \in I$, který má dva systémy různých reprezentantů (2-SRR), tedy prostá zobrazení $f, g : I \to X$ tž. $\forall i \in I, f(i), g(i) \in M_i$ jejichž obory hodnot jsou disjunktní ($H(f) \cap H(g) = \emptyset$). $\Leftrightarrow$ platí podmínka $\forall J \subseteq I : |\bigcup_{i \in J} M_i| \geq 2|J|$.*

Důkaz: Použiji trik: Vytvořím si $\mathcal{M}'$ takové, že do něj dám všechna M_i dvakrát, tím určitě požaduji dva různé reprezentanty pro každou M_i. Pro $\mathcal{M}'$ nám ale určitě platí *Hallova věta*. Nyní si všimneme, jak se změnila podmínka, když jsme zdvojnásobili $|I|$. Zkoumáme všechny J': Nejhorší případ nastane pokud vybereme vždy M_i a jejího dvojníka. A potom tedy dostaneme podmínku $|J'| = 2|J|$. V ostatních případech si tedy hravě vystačíme s $|J'| \leq 2|J|$ a z toho dostaneme podmínku pro 2-SRR.

Q.E.D.

Věta ***10.2.3—Hypergraf pro párovací strategii*****:** *Mějme hypergraf $F = (V, E)$ takový, že pro každou $H \subseteq E$ je $|\bigcup_{E_i \in H} E_i| \geq 2|H|$, potom v grafu F existuje párovací strategie (tedy hra dopadne remízou).*

[1] důkaz najdete v: Valla, T., Matoušek, J. *Kombinatorika a Grafy I.* Praha: KAM MFF UK, 2005.

Důkaz: Jednoduše ověříme podmínku pro 2-SRR a tím dostaneme pro každou hyperhranu dva reprezentanty. Druhý hráč tedy bude hrát párovací strategii takovou, že pokud první hráč zahraje do nějaké hyperhrany, on potáhne do reprezentanta. A i kdyby první táhnul do reprezentanta, tak druhému zbyde druhý reprezentant. Tato hra je tedy očividně remízová.

Q.E.D.

Pozorování *10.2.4—Počet vyhrávajících linií*: *Ve hře* n^d *prochází každým bodem maximálně* $\frac{3^d-1}{2}$ *vyhrávajících linií.*

Bez DK.

Pozorování *10.2.5—Hypergraf pro párovací strategii 2*: *Pro hypergraf* $F = (V, E)$ *jehož všechny hrany mají velikost alespoň* n *a všechny vrcholy leží v maximálně* $\frac{n}{2}$ *hranách, potom v* F *existuje párovací strategie.*

Bez DK.

Důsledek: Když mám hru n^d, kde $n \geq 3^d - 1$ potom v n^d existuje párovací strategie.

Bez DK.

Conwayův hlavolam a potenciálové metody Conwayův hlavolam (vyřešení Solitaire army), je předstupeň potenciálové metody.

SOLITAIRE ARMY '61: Máme nekonečnou šachovnici a jednu přímku (bariéru), která jí roděluje na horní a dolní polovinu. Pod bariérou jsou naskládány kameny (vojáci). S kameny se dá pohybovat pouze tak, že přeskočí sousední kámen na vedlejší volné políčko. Přeskočený kámen je ihned odebrán ze hry. Skáče se pouze vodorovně a svisle, nikoli diagonálně. Na začátku jsou všechny kameny rozmístěny pod bariérou a cílem je naskákat co nejvýše nad bariéru s dannou konfiguraci. A nebo vytvořit konfiguraci takovou, že se s ní dá doskákat do určité výšky nad bariéru.

Kolik potřebuji nejméně kamenů na doskákání do určité výše?

výška 1 — 2 kamínky.

výška 2 — 4 kamínky.

výška 3 — 8 kamínků.

výška 4 — 20 kamínků.

výška 5 — s žádnou konfigurací nelze doskákat.

Věta *10.3.1—Solitaire army výšky* 5: *Ve hře Solitaire army nelze s žádnou počáteční konfigurací doskákat do výšky* 5.

Důkaz: Pro potřeby důkazu budeme uvažovat, že se do výšky 5 nedá doskákat s žádnou konečnou konfigurací. To nás ale nijak nomezí, protože kdybychom to uměli s nekonečnou konfigurací, tak bychom stejně potřebovali jen konečně kroků a tedy by to muselo jít i s konečnou konfigurací.
Budeme postupovat sporem. Každému políčku přiřadíme potenciál a napětí budeme říkat celková sumě potenciálu políček obsazených kameny. Ukážeme si dvě věci: Že pohyby nezvyšují napětí a celkový potenciál pod příkou je < 1. Pokud se nám to podaří a na páté úrovni vytvoříme políčko z potenciálem $= 1$, tak máme vyhráno.
Uvažme potenciál daný tabulkou, kde $\omega = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$ je zlatý řez, tedy kořen

rovnice $\omega^2+\omega=1$.

5	$\dots$	ω^2	ω^1	1	ω^1	ω^2	$\dots$
4	$\dots$	ω^3	ω^2	ω^1	ω^2	ω^3	$\dots$
3	$\dots$	ω^4	ω^3	ω^2	ω^3	ω^4	$\dots$
2	$\dots$	ω^5	ω^4	ω^3	ω^4	ω^5	$\dots$
1	$\dots$	ω^6	ω^5	ω^4	ω^5	ω^6	$\dots$
	$\dots$	ω^7	ω^6	ω^5	ω^6	ω^7	$\dots$
	$\dots$	ω^8	ω^7	ω^6	ω^7	ω^8	$\dots$
	$\dots$	ω^9	ω^8	ω^7	ω^8	ω^9	$\dots$
	$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Pohyby nezvyšují napětí:

pohyb nahoru tedy $\omega^k = \omega^{k+1}+\omega^{k+2}$, což je ale přesně umocněná definice zlatého řezu.

pohyb dolů tedy $\omega^k < \omega^{k-1}+\omega^{k-2} = \omega^{k-3}$.

pohyb doleva a doprava: Zde nastávají 3 případy. Dva jsme rozebrali dříve. Třetí: $\omega^k < \omega^{k-1}+\omega^k$.

Nyní sečteme celkový možný potenciál pod bariérou. První řádek pod bariérou: $\omega^5 + 2\sum_{i=6}^{\infty}\omega^i$, což je geometrická řada s kvocientem ω, tedy $=$ $\omega^5+2\omega^6\frac{\omega^\infty-1}{\omega-1} = \omega^5+\frac{2\omega^6}{1-\omega} = \omega^5+\frac{2\omega^6}{\omega^2} = \omega^5+2\omega^4 = \omega^2$. Obdobně pro další řádky: Stačí si domyslet ve výpočtu do každého exponentu $+k$. A dostaneme opět geometrickou řadu s kvocintem omega: $\sum_{i=2}^{\infty}\omega^i = \omega^2\frac{\omega^\infty-1}{\omega-1} = 1$. Tedy bychom museli použít všech nekonečně políček pod bariérou abychom mohli doskákat do výše 5. ↯

Q.E.D.

Věta *10.3.2—Erdős, Selfridge*: *Mějme $F=(V,E)$ n-uniformní (každá hyperhrana má právě n prvků) hypergraf $|E| < 2^{n-1}$, potom druhý hráč má blokovací remízu v silné hře. Tedy algoritmus, který umí šlápnout alespoň jednou do každé vyhrávající linie, a proto hra dopadne remízou.*

Pozorování *10.3.3—O těsném odhadu Erdős, Selfridge*: *Existuje n-uniformní hypergraf $F=(V,E)$, kde paltí rovnost, tedy $|E| = 2^{n-1}$ a který je vyhraný pro prvního hráče. (odhad je těsný.)*

Důkaz: Vezmu binární strom hloubky n. Každá hyperhrana bude začínat v kořeni a poté bude mít 2^{n-1} možností jak vybrat cestu do listu.

Nyní zbývá jen dokázat, že je hra vyhraná pro prvního hráče. Ten táhne do kořene, soupeř tedy musí zahrát do listu, jenže první hráč zahraje do opačné větve, tak aby si budoval cetičku do listu. Vždy bude moci udělat další tah, protože strom je binární a když se dostane do listu, tak určitě obsadil nějakou vyhrávající hyperhranu.

Q.E.D.

V Praze dne 18. dubna 2013 zapsal Tomáš Masařík. Verze 1.0