# Kombinatorická teorie her

přednáší Mgr. Robert Šámal, Ph.D. a Mgr. Tomáš Valla

*2 hodina: Minimax*

## Základní věta

**Věta** *2.1*—***Základní věta*****:** *V každé konečné kombinatorické hře bez remíz existuje buď vyhrávací strategie pro prvního nebo pro druhého hráče.*

*Důkaz:* První hráč $A$ má tahy do pozic $G_1, \cdots, G_n$.

Podle indukce:

**Buď** $\forall G_i$ vyhraje hráč $B \to$ vyhraje $B$.

**Nebo** $\exists G_i$ vyhraje hráč $A \to$ vyhraje $A$.

*Q.E.D.*

### Jaké potřebujeme předpoklady?

Konečná hra (končí po $\leq C$ tazích a nějak dopadne.) Formálně tedy indukce postupuje dle $C$.

### Platí věta i pokud je hra nekonečná?

**př: Divná hra** Hráči střídavě píší 0 a 1, $A \subseteq (0, 1)$. První hráč vyhraje, pokud takto zapsané desetinné číslo $č \in A$. Druhý hráč vyhraje, pokud $č \notin A$. Pokud předpokládáme axiom výběru, tak věta neplatí pro nějakou volbu A. *Bez DK.*

**Základní věta pro zaujaté hry.** Hráči **L** (Levý)a **R** (pRavý).

**Věta** *2.2*—***Existence vyhrávající strategie*****:** *V každé zaujaté kombinatorické hře bez remíz existuje buď vyhrávací strategie pro prvního (**V**yhraná), pro druhého (**P**rohraná), pro **L**evého nebo p**R**avého hráče.*

*Důkaz:* Použijeme větu *2.1* dvakrát.

**Začíná L** a vyhraje buď **L** nebo **R**.

**Začíná R** a vyhraje buď **L** nebo **R**.

Rozborem případů nastává jedna z možností **P, V, L** nebo **R** vyhraje.

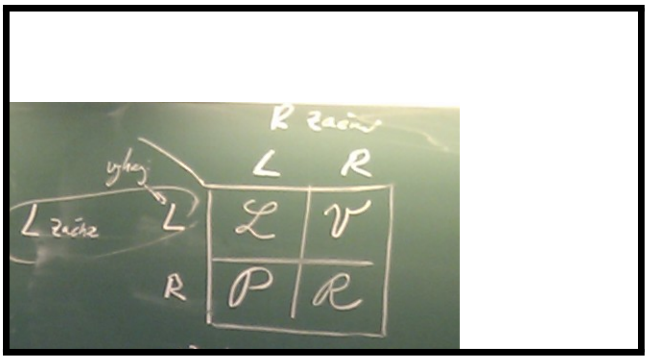
*Q.E.D.*

**Definice** *2.3*—***Definice hry*****:** **Hra** $G$ je definována: $G = \{\mathcal{G}^{\mathcal{L}} | \mathcal{G}^{\mathcal{R}}\}$, kde $\mathcal{G}^{\mathcal{L}} = \{G^L |$ hráč **L** může z $G$ táhnout do $G^L\}$ a $\mathcal{G}^{\mathcal{R}} = \{G^R |$ hráč **R** může z $G$ táhnout do $G^R\}$.

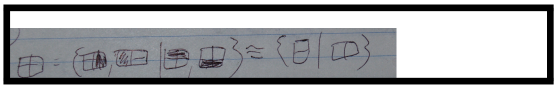
**Definice** *2.4*—***Třídy her*****:**

**vyhrané pro Levého** $G \in \mathcal{L} \Leftrightarrow$ (**L**evý začne $\Rightarrow$ **L** vyhraje) $\wedge$ (p**R**avý začne $\Rightarrow$ **L** vyhraje)

**vyhrané pro pRavého** $G \in \mathcal{R} \Leftrightarrow$ (**L**evý začne $\Rightarrow$ **R** vyhraje) $\wedge$ (p**R**avý začne $\Rightarrow$ **R** vyhraje)




Obrázek 1: Zaujaté hry – tabulka



Obrázek 2: př: množina hry Domineering

**Vyhrané pro začínajícího** $G \in \mathcal{V} \Leftrightarrow$ (**L**evý začne $\Rightarrow$ **L** vyhraje) $\wedge$ (p**R**avý začne $\Rightarrow$ **R** vyhraje)

**Prohrané pro začínajícího** $G \in \mathcal{P} \Leftrightarrow$ (**L**evý začne $\Rightarrow$ **R** vyhraje) $\wedge$ (p**R**avý začne $\Rightarrow$ **L** vyhraje)

**Definice *2.5*—*Strom hry*:** **Strom hry** je strom pro něhož platí: leví synové jsou tahy levého hráče a praví synové tahy pravého hráče.

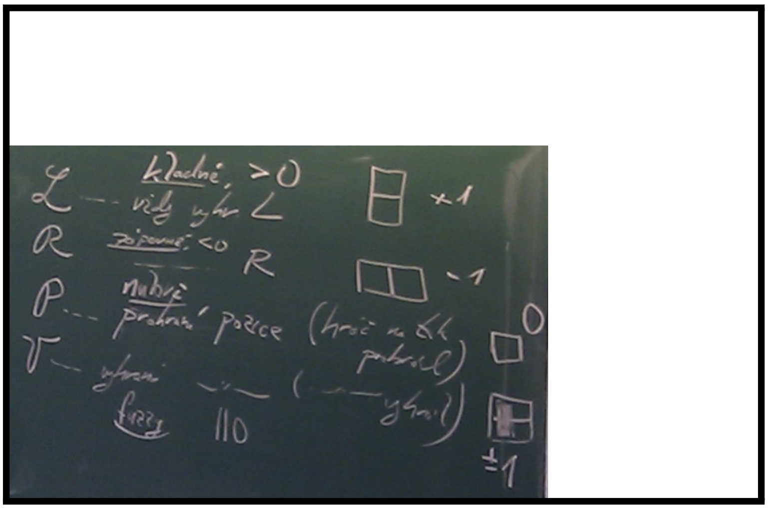
**Minimax** Algoritmus minimaxu využívá strom hry, kde jednotlivé hry (uzly stromu) jsou odspodu ohodnoceny a zařazeny do množin $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{V}$ nebo $\mathcal{P}$. Ve skutečných hrách př: šachy je hra v listech stromu ohodnocena nějakou funkcí, protože strom procházíme jen do určité hloubky a nemůžeme uzly zařadit s jistotou do jedné množiny – provádíme heuristiku.

**Maize/Maze – Bludišťátko/Bludiště** Hráči táhnou kamenem (popř. kameny) na šachovnici postavené na jeden roh, kde je vytvořeno bludiště z překážek. **L**evý hráč posunuje kámen doleva dolů, p**R**avý hráč doprava dolů. Hráč, který nemá tah, prohrál.

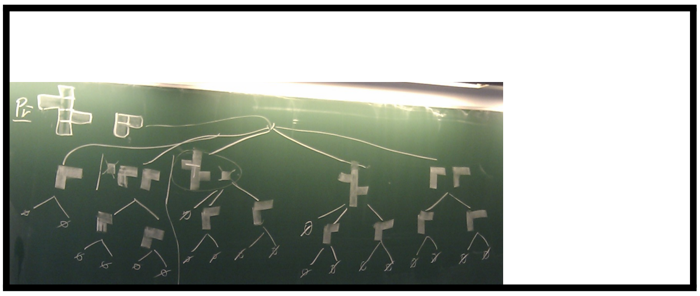
**Maize** Hráč může táhnout pouze o jedno pole.

**Maze** Hráč se může rozhodnout, zda bude táhnout o jedno nebo o více polí.

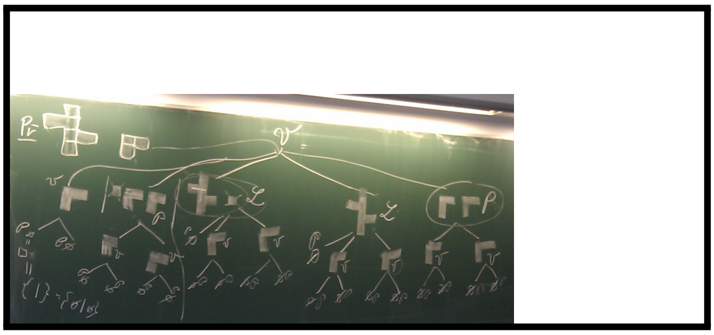
**Odčítací hra** Máme zadané číslo. **L**evý i p**R**avý hráč ve svém tahu vždy odečte jedno svoje číslo. př: hra $\{1, 2|2, 3\}$



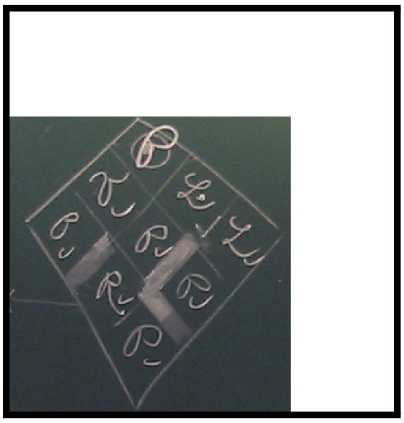

Obrázek 3: př: hry Domineeringu různých typů($\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{V}, \mathcal{P}$)



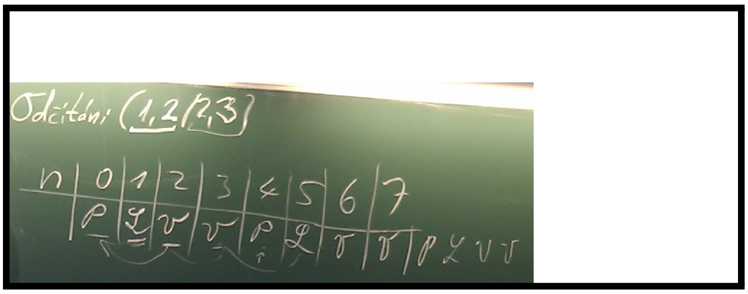
Obrázek 4: př: Strom Domineeringu



Obrázek 5: př: vyhodnocený Strom Domineeringu



Obrázek 6: př: vyhodnocený Maize




Obrázek 7: př: vyhodnocená odčítací hra

**Jak dokázat, že se ohodnocení jednotlivých her periodicky opakuje?** Použijeme chytře indukci. Musíme si vypočítat tolik počátečních případů, abychom poté mohli ukázat, že se rozhodujeme pouze z nějakých předchozích her, a že pro nová rozhodnutí se budeme dívat na stejné předchozí hry jako v IP. př: V indukci koukáme na 2. blok a v této konkrétní hře závisí pouze na předchozích 3 pozicích. Podle nich vyplňujeme tabulku. Jedná se však o stejnou situaci jako předtim, když jsme se koukali na předchozí 3 bloky. (viz. obrázek)

### Nestranné hry

**Definice *2.6*—*Nestranná hra*:** Hra $G$ je nestranná $\Leftrightarrow \forall G' \in \mathcal{G}^{\mathcal{L}}$ je nestranná $\vee$ oba hráči mají stejné tahy ($\mathcal{G}^{\mathcal{L}} = \mathcal{G}^{\mathcal{R}}$).

př: Kdyby byly stejné odčítací množinky u odčítací hry.

**Pozorování *2.7*—*Odčítací hra je nstranná*:** *Každá odčítací hra bude typu $\mathcal{V}$ nebo $\mathcal{P}$.*

*Důkaz:*

Nechť $G \in \mathcal{L} \Rightarrow \exists$ vyhrávací strategie pro **L**evého hráče.

Pokud p**R**avý hráč použije stejnou strtegii, tak vyhraje $\Rightarrow$ SPOR

*Q.E.D.*

---

V Praze dne 31. ledna 2011 zapsal Tomáš Masařík. Na opravách spolupracoval Martin Koutecký. Verze 1.2