Kombinatorická teorie her

přednáší Mgr. Robert Šámal, Ph.D. a Mgr. Tomáš Valla

3 hodina: Úvodní část definice

Věta 3.1:

- **Nechť G je nestranná konečná kombinatorická hra.**
- **Její pozice se dají zapsat $A \cap B = \emptyset$.**
- **$\forall$ tahy $p \in P, \forall a \in A : p$ vede do B.**
- **$\exists$ tah $p \in P, \forall b \in B : p$ vede do A.**

Tak potom A jsou právě prohrávající pozice a B jsou právě vyhrávající pozice.

DK: Indukcí dle velikosti B. Pokud v B jediný vrchol, tak je to jednoduché, protože ho musíme odebrat a tím se určitě nedostaneme do B. Pro indukční krok použijeme obrázek.

Q.E.D.

Star Wars — speciální případ hry Cut throath: Hráči střílí do mezihvězdných lodí. Lodě jsou reprezentovány grafy s jedním středovým vrcholem a zbytkem vrcholů, které jsou se středovým spojeny právě jednou hranou. Jiné hrany se v tomto grafu nevyskytují. Hráč na tahu:

buďto střelí doprostřed, poté se odebere celá loď.

nebo střelí do okrajového vrcholu, tak se smaže pouze trefený vrchol. (Do okrajového vrcholu se nesmí střílet, pokud zbyl pouze jedinný. V tomto případě, hráč může dannou lodičku terfit pouze doprostřed.)

Pokud hráč nemůže táhnout prohrál.

Tvrzení: Ve hře Star Wars hra $\in$:

$\mathcal{P}$, pokud počet lichých i počet sudých lodí je sudý.

$\mathcal{V}$ jinak.

Hodnota lodi se počítá dle počtu okrajových vrcholů (tedy bez středového vrcholu).

DK: Použijeme větu 3.1. Rozebereme si možné případy:

A–SS Množina A: Sudý počet Sudých lodí a Sudý počet Lichých lodí.
B–LS Množina B: Lichý počet Sudých lodí a Sudý počet Lichých lodí.
B–SL Množina B: Sudý počet Sudých lodí a Lichý počet Lichých lodí.
B–LL Množina B: Lichý počet Sudých lodí a Lichý počet Lichých lodí.

Nyní dokážeme, že ať hrajeme v množině A jakkoli, tak se nám nepodaří zahrát nikam do zpátky do A. Pokud sesřelíme loď, dostaneme se do případu LS nebo SL a pokud sestřelíme krajní vrchol, tak se dostaneme do případu LL. A všechny tyto případy jsou v B a jiný tah neexistuje. Naopak potřebujeme dokázat, že z množiny B vždy existuje tah do A. A tedy v případech SL a LS odstřelíme loď z množiny s lichým počtem lodí. V případě LL naopak odstřelíme okrajový vrchol a dostaneme opět SS.

Q.E.D.

Jemnější chakterizace Nebude se nadále zavývat jen tím, který hráč vyhraje, ale také budeme analyzovat to, o kolik který hráč vyhraje.

Trocha Historie

'35 SPRAGUE, GRUNDY Kompletní charakterizace NIMu, i když to udělal již někdo před nimy. Ale hlavně se jim podařilo ukázat, že každou nestrannou kombinatorickou hru lze převést na odpovídající partii NIMu.

NIM: Je dána hromádka sirek. Hráči mohou odebírat určité počty sirek. Prohraje ten hráč, který nemůže odebrat žádný z povolených počtů sirek.

'50 BEREKAMP, GUY, CONVAY Zkoumaly zaujaté hry.

Axiomatická výstavba Zatím si je uvedeme neformálně, či trochu nesprávně a postupně si je budeme opravovat, až získáme správnou definici

Porovnávání her Chtěli bychom umět hry nějak porovnávat.

Identita

Izomorfismus stromů

Když dopadnou stejně

Sčítání Chtěli bychom také umět dvě hry sčítat, tedy chceme mít možnost hrát do libovolného sčítance.

Negace Také bychom chtěli mít možnost hru znegovat a role hráčů tedy naprosto otočit.

Porovnání Potřebujeme také hry porovnávat mezi sebou. tedy pronášet tvrzení hra A je alespoň tak dobrá jako hra B.

Tvrzení: G hra a Z je prohraná hra (tedy $Z \in \mathcal{P}$). Potom tvrdím, že jak G, tak $G + Z$ mají stejnou výsledkovou třídu (tedy jednu z $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{V}$). Poté budeme hrám P říkat nulové, protože když je přičteme, tak se nic nezmění.

DK: Rozborem možností.

- $G \in \mathcal{L}$ To může vypadat, že buď začínám a jsem Levý táhnu tedy do Levé hry. Soupeř musí volit buď prohranou a nebo prohranou. Pokud nezačínám, tak, ale protihráč má před sebou na výběr z dvou prohraných her a když si zvolí kteroukoli, tak já mu na jeho tah opovímv té, kterou si zvolil.
- $G \in \mathcal{R}$ Symetrický případ.
- $G \in \mathcal{P}$ Na výběr dvě prohrané hry. Soupeř vždy táhne do té hry kde jsem táhnul já a nemám šanci.
- $G \in \mathcal{V}$ Zde naopak hraju do vyhrané hry a soupeř dostane předchozí případ.

Q.E.D.

Důsledek: Lze dokázat, že každá hra která nic nemění patří do $\mathcal{P}$.

DK: viz. obrázek, ze kterého je vidět všechny kombinace.

Q.E.D.

Konvence, značení Později nám takovéto značení vyplyne z axiomů.

$G = 0$, když $G \in \mathcal{P}$

$G < 0$, když $G \in \mathcal{R}$

$G > 0$, když $G \in \mathcal{L}$

$G||0$(fuzzy), když $G \in \mathcal{V}$

Axiomy Správné axiomy:

1. Stará definice: Hra G je množina $G = \{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^R\}$, kde $\mathcal{G}^L$ a $\mathcal{G}^R$ jsou možiny her. Problém s takovouhle definicí je, že se jedná o rekurzi bez začátku. My to spravíme podobně jako konstrukci přirozených čísel pouze z prázdné množiny.

DEF: Hra G má narozeniny $b(G) = max$(narozenin podher) a $b(0) = 0$.

DEF: Hra G se narodila do D-tého dne. Tedy má narozeniny maximálně tak velké jako D.

DEF: Hra G je množina $G = \{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^R\}$, kde $\mathcal{G}^L$ a $\mathcal{G}^R$ jsou možiny her. Navíc zavedeme hru 0 a nepovolíme aby G byla prvkem $\mathcal{G}^L$ nebo $\mathcal{G}^R$.(Hrám, které to povolují se říká Loopy games a těmi se zabývat nebudeme.)

V Praze dne 3. listopadu 2010 zapsal Tomáš Masařík. Verze 1.0