Kombinatorická teorie her

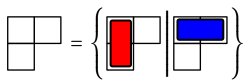
přednáší Mgr. Robert Šámal, Ph.D. a Mgr. Tomáš Valla

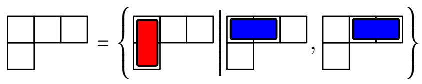
4 hodina: Axiomatické zavedení her

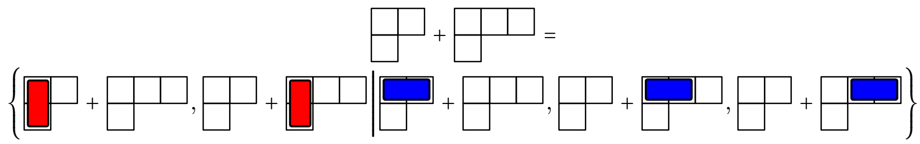
Jiný pohled na indukci Pro některé důkazy se nám bude hodit, koukat se na indukci trochu jinak, než jak jsme zvyklí. Tedy ψ_0 platí a zároveň $(\psi_{n-1} \Rightarrow \psi_n) \Rightarrow$ tvrzení platí.

My se na ní budeme dívat tak, že pokud budeme chtít dokázat tvrzení $\forall x P(x)$, tak použijeme $\forall y : (y < x) P(y)$. Navíc musíme rozmyslet minimální případy. potřebujeme však, aby relace $<$ byla *dobré uspořádání*, tedy aby každá neprázdná podmnožina obsahovala minimální prvek.

Sčítání her







$G + H = \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L | \mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\}$, kde , znamená $\cup$. Takovéto sčítání odpovídá představě hraní her G a H dohromady.

Musíme se ale zamyslet nad tím jestli je v pořádku že:

pro definici + používáme zase +? Je to však jiné + definované:

Definice *4.1.1*—*Operace na množině a množině obsahující množiny*:

$$G + \mathcal{S} := \bigcup_{\forall S \in \mathcal{S}} (G + S)$$

Tato definice lze zobecnit pro libovolnou operaci.

Také si musíme uvědomit, že + pro větší množiny je definováno pomocí + pro alespoň jednu množinu menší, tedy pro hru s menšími narozeninami.

A dle našeho pohledu na indukci je definice korektní, pokud Rozmyslíme minimální případ, tedy $0 + 0$ je 0. To můžeme nahlédnout i tak, že kvantifikujeme přes prázdnu množinu.

Definice *4.1.2*—*Sčítání*: Mějme hry G a H, potom hra $G + H$ je definována takto: $\{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L | \mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\}$, kde + odpovídá definici *4.1.1* a hra $0 + 0$ je definována jako hra 0.

Pozorování *4.1.3*—*Vlastnost prázdné množiny*: $G + \varnothing \equiv \varnothing$

Důkaz: Dokážeme to z definice *Operace na množině a množině obsahující množiny.* $\mathcal{S}$ je $\emptyset$ a pokud provedeme sjednocení přes všechny prvky prázdné množiny, dostaneme opět prázdnou množinu.

Q.E.D.

Tvrzení *4.1.4*—*Nulový prvek vůči sčítání*: $G + 0 \equiv G$

Důkaz:

$$G + \{\emptyset|\emptyset\} \equiv \{\mathcal{G}^L + 0, G + \emptyset|\emptyset, \mathcal{G}^R + 0, G + \emptyset\} \equiv \{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^R\} \equiv G$$

Z *Vlastnosti prázdné množiny* víme, že $G + \emptyset \equiv \emptyset$ a tedy na ní můžeme zapomenout. A $\mathcal{G}^L + 0$ umíme, protože se jedná o menší množiny, které dostaneme z indukčního předpokladu. Zbývá tedy rozmyslet minimální případ. Ale to je přesně $G = 0 = \{\emptyset|\emptyset\}$, což vyřešíme snadno opět pomocí *Vlastnosti prázdné množiny.*

Q.E.D.

Tvrzení *4.1.5*—*Komutativita sčítání*: $G + H \equiv H + G$

Důkaz:

$$G + H := \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L|\mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\} \Leftrightarrow$$
$$G + H := \{G + \mathcal{H}^L, \mathcal{G}^L + H|G + \mathcal{H}^R, \mathcal{G}^R + H\} \Leftrightarrow$$
$$H + G := \{\mathcal{H}^L + G, H + \mathcal{G}^L|\mathcal{H}^R + G, H + \mathcal{G}^R\}$$

První ekvivalence pline z komutativity sjednoceni. Druhá v sobě obsahuje indukční předpoklad pro menší množiny a konečně také pro minimální prvek, což je opět 0 a podobně jako v předcházející větě používáme *Vlastnost prázdné množiny.*

Q.E.D.

Tvrzení *4.1.6*—*Asociativita sčítání*: $(G + H) + K \equiv G + (H + K)$

Bez DK.

Doplněk her Doplněk lze definovat jako $-G := \{-\mathcal{G}^R|-\mathcal{G}^L\}$,což si můžeme představit pomocí výměny rolí hráčů. V takovéto definici jsou ovšem stejné nástrahy jako v definici sčítání a my je také obdobně vyřešíme.

Definice *4.2.1*—*Doplněk*: Pokud je G hra, tak $-G := \{-\mathcal{G}^R| - \mathcal{G}^L\}$, kde operace $-$ funguje dle *Operace na množině a množině obsahující množiny.* Tedy opět z indukce a ověření minimálního případu dostaneme korektnost definice. Domluvíme se také na tom, že budem používat konvenci: $G + (-H) \equiv G - H$.

Pozorování *4.2.2*—*Doplněk nuly*: $-0 \equiv 0$

Důkaz: Tohle jsme vlastně již dokázali ověřením minimálního případu v definici *Doplňku.*

$$-0 \equiv \{-\emptyset| - \emptyset\} \equiv \{\emptyset|\emptyset\} \equiv 0$$

Q.E.D.

Tvrzení *4.2.3*—*Doplněk doplňku*: $-(-G) \equiv G$

Důkaz: Z definice užitím indukce jako v ostatních případech.

Q.E.D.

Tvrzení *4.2.4*—*Doplněk součtu*: $-(G+H) \equiv -G-H$

Důkaz:

$$-(G+H) \equiv -\{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L | \mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\} \equiv$$
$$\{-\mathcal{G}^L + H, -G + \mathcal{H}^L | -\mathcal{G}^R + H, -G + \mathcal{H}^R\} \equiv$$
$$\{-\mathcal{G}^L + (-H), -G + -\mathcal{H}^L | -\mathcal{G}^R + (-H), -G + -\mathcal{H}^R\} \equiv (-G) + (-H) \equiv -G - H$$

V důkazu opět využíváme indukční předpoklad. Minimální případ rozmyslíme snadno: $-(0+0) \equiv -(0) \equiv 0 \equiv 0+0 \equiv (-0)+(-0)$.

Q.E.D.

Rovnost her Zkoumání rovnosti her si zadefinujeme tak, že pozorované hry dopadnou stejně. Tedy

Definice *4.3.1*—*Rovnost*:

$$G = H \Leftrightarrow \forall X; G + X \sim H + X$$

(pomocí $\sim$ značíme relaci *dopadnout stejně*.)

Tato definice má jediný problém v tom, že se taková vlastnost blbě dokazuje. O to lépe se ale používá a my si zachvíli ukážeme ekvivalentní definici, která se dokazuje podstatně lépe. Když už jsme si takto netradičně „předdefinovali“ rovnost, tak bychom alespoň chtěli, aby byla ekvivalencí.

Tvrzení *4.3.2*—*Test Ekvivalence*: *podíváme se jestli je námi definovaná = ekvivalencí*

Důkaz:

reflexivita $G + X \sim G + X \Leftrightarrow G = G$
tranzitivita $G = H \wedge H = K \Leftrightarrow G + X \sim H + X \sim K + X \Leftrightarrow G = K$
symetrie $G = H \Leftrightarrow G + X \sim H + X \Leftrightarrow H = G$

Q.E.D.

Věta *4.3.3*—*Vztah prohraných a nulových her*: $G = 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{P}$

Důkaz:

$$G = 0 \Leftrightarrow \forall X; G + X \sim (X + 0 = X)$$

Chceme dokázat: $G \in \mathcal{P} \Rightarrow G + X \sim X$. Když soupeř hraje v G odpovíme mu v G, když soupeř hraje v X odpovíme mu v X. A nyní ještě obrácenou implikaci $G + X \sim X \Rightarrow G \in \mathcal{P}$. Opět použitím stejné strategie dostaneme, že G musí nutně být prohraná hra.

Q.E.D.

Věta *4.3.4*—*Rozdíl stejných her*: $G - G = 0$

Důkaz: Z předchozí věty víme $G + (-G) = 0 \Leftrightarrow G + (-G) \in \mathcal{P}$. A nyní použijeme zrcadlící strategii. Tedy na každých náš tah, provede soupeř stejný tah ve druhé hře. Tedy tahy musí dojít nejdříve začínajícímu hráči a tím pádem je tato hra prohraná.

Q.E.D.

V Praze dne 11. ledna 2011 zapsal Tomáš Masařík. Verze 1.2