# Kombinatorická teorie her

přednáší Mgr. Robert Šámal, Ph.D. a Mgr. Tomáš Valla

*5 hodina: Očíslování her*

## Rovnost

**Věta *5.1.1—Vztah rovnosti a rozdílu*:** $G = H \Leftrightarrow G - H \in \mathcal{P}$.

*Důkaz:*

$$G = H \Leftrightarrow G + (-H) = H + (-H) \in \mathcal{P}$$

Dle věty o *rozdílu stejných her.*

*Q.E.D.*

**Tvrzení *5.1.2—Součet nestranných her*:** *pro nestranné hry je* $X + X = 0$.

*Důkaz:*

buď je $X \in \mathcal{P}$. Tedy $X = 0$, potom $0 + 0 = 0$.

nebo je $X \in \mathcal{V}$. Tedy vždy když první hráč hraje v první hře, druhý zahraje v druhé hře.

*Q.E.D.*

## Nerovnost

**Definice *5.2.1—Větší, rovno*:** $G \geq H \Leftrightarrow \forall X; G + X \in \mathcal{L} \Leftarrow H + X \in \mathcal{L}$.

**Definice *5.2.2—Menší, rovno*:** $G \leq H \Leftrightarrow \forall X; G + X \in \mathcal{R} \Leftarrow H + X \in \mathcal{R}$.

**Pozorování *5.2.3—Vztah rovnosti a nerovností*:** $G = H \Leftrightarrow G \geq H \wedge G \leq H$.

*Bez DK.*

**Tvrzení *5.2.4—Vztah mezi nerovnostmi*:** $G \geq H \Leftrightarrow H \leq G$.

*Bez DK.*

**Věta *5.2.5—Kladná hra*:** $G \geq 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$. *Tedy **L**evý vyhraje G pokud p**R**avý začne.*

*Bez DK.*

**Důsledek:** $G \geq H \Leftrightarrow G + (-H) \geq 0 \Leftrightarrow G - H \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$.

Pro vztah $G$ a $H$ stačí zkoumat jak dopadne $G - H$:

$G - H \in \mathcal{P} \Leftrightarrow G = H$.

$G - H \in \mathcal{L} \Leftrightarrow G > H$.

$G - H \in \mathcal{R} \Leftrightarrow G < H$.

$G - H \in \mathcal{V} \Leftrightarrow G \parallel H$, nazývané neporovnatelné, spletené či fuzzy.

Zavedeme si další značení pro hry

$G < H \vee G \parallel H :\Leftrightarrow G \lhd | H$

$G > H \vee G \parallel H :\Leftrightarrow G | \rhd H$

### Trocha algebry

**Věta *5.3.1*—*Uspořádání na hrách*:** *Hry s relací $\leq$ tvoří částečně uspořádanou množinu.*

*Důkaz:* Nejprve si připomeneme definici částečně uspořádané množiny. Je to tedy relace, která je reflexivní($G \leq G$), tranzitivní($G \leq I \wedge I \leq H \Rightarrow G \leq H$) a slabě antisimetrická ($G \leq H \wedge H \leq G \Rightarrow G = H$).

reflexivita: $G + X \in \mathcal{P} \Rightarrow G + X \in \mathcal{P}$.

tranzitivita: $(I + X \in \mathcal{P} \Rightarrow G + X \in \mathcal{P} \wedge H + X \in \mathcal{P} \Rightarrow I + X \in \mathcal{P}) \Rightarrow H + X \in \mathcal{P} \Rightarrow G + X \in \mathcal{P}$.

slabá antisymetrie: Zde využíváme faktu, že jsme si předdefinovali =.

*Q.E.D.*

**Věta *5.3.2*—*Abelova grupa*:** *Množina her s operacemi* $+$, $-$ *a* $0$ *tvoří Abelovu grupu.*

*Bez DK.*

**Hodnoty her** Chtěli bychom nějak přiřazovat hrám čísla podle toho jak jsou dobré. Půjdeme na to takto pro $n \in \mathbb{Z}$:

$n - 0; 0 := \{|\}$

$n > 0; N := \{n - 1|\}$

$n < 0; N := \{|n + 1\}$

Tímto jsme si vlastně pro hry předdefinovali celá čísla. Jenže takováto definice je docela podivná, protože symbolem $n + 1$ respektive $n - 1$ myslíme sčítání na přirozených číslech. Jak to napravit?

**Definice *5.4.1*—*Hodnota her pro celá čísla*:** zadefinujeme si zobrzení $f : \mathbb{Q}_{diad.} \longrightarrow \mathbb{H}$, kde $\mathbb{H}$ znamená množina všech her,a $_{diad.}$ značí diadické racionální čísla je číslo, které má ve jmenovateli mocninu dvojky. Píšeme $f(x) = X$. Definujeme tedy $f$ nejdříve pro všechna $x \in \mathbb{Z}$:

$f(0) := \{|\}$

pro $n > 0; f(n) := \{f(n - 1)|\}$

pro $n < 0; f(n) := \{|f(n + 1)\}$

**Pozorování *5.4.2*—*Korektnost definice celočíselná verze*:** *Definovali jsme* $f; \forall x \in \mathbb{Z}$

Toto pozorování by se dokázalo jednoduše indukcí.

O tomto zobrazení si později dokážeme, že je homomorfismus. Pro procvičení se jednoduše dokáže např: $-f(n) = f(-n)$ nebo $f(n) + f(1) = f(n + 1)$.

**Poznámka:** Je jasné jak si odpovídaí hry abstraktní a hry konkrétní. Tím jsme se až dosud zaobírali, tím, že jsme analyzovali konkrétní hry. Není, ale jasné jak si odpovídájí $\mathbb{Q}_{diad.}$ a abstraktní hry. Je tam zobrazení a není to bijekce. A my ztotožňujeme hry konkrétní s nějakými čísly.

**Definice *5.4.3*—*Hodnota her pro diadická racionální čísla*:** Nyní si dodefinujeme hodnoty $f$, pro všechna diadická racionální čísla: pokud $2 \nmid m \in \mathbb{Z}$ a $l \in \mathbb{N}$. Potom

$$f(\frac{m}{2^l}) = \{f(\frac{m-1}{2^l})|f(\frac{m+1}{2^l}\}$$

**Pozorování** ***5.4.4—Korektnost definice diadická verze*:** *Tímto jsme definovali* $f(x); \forall x \in \mathbb{Q}_{diad.}$

*Důkaz:* Jen idea: když je $m$ liché, tak je $m+1$ i $m-1$ sudé a tedy můžeme krátit. S touto úvaou již můžeme použít indukci dle $l$.

*Q.E.D.*

**Poznámka:** Takováto definice se dá zobecnit i na reálná čísla.

---

V Praze dne 19. listopadu 2010 zapsal Tomáš Masařík. Verze 1.0