# Kombinatorická teorie her

přednáší Mgr. Robert Šámal, Ph.D. a Mgr. Tomáš Valla

## *6 hodina: Očíslování her*

**Homomorfismus** Minule jsem si ukazovali jsme si, že $f(n+1) = f(n)+f(1)$. Dnes si ukážeme obecněji, že zobrazení $f$ je homomorfismem, tedy, že se chová rozumně.

**Definice *6.1.1—Homomorfismus*:** zobrazení $f$ je homomorfismus když splňuje podmínku zachování operací. Tedy například pro binární operátory platí: $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

**Lemma *6.1.2—Sčítací*:** *pro $a, b, c \in \mathbb{N}$ a zobrazeni $f : \mathbb{Q}_{diad.} \longrightarrow \mathbb{HRY}$ platí:*

**(1)** $a + b + c > 0 \Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) > f(0)$

**(2)** $a + b + c = 0 \Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) = f(0)$

**(3)** $a + b + c < 0 \Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) < f(0)$

*Důkaz:*

Nejprve si dokážeme **(2)**. Vzpomene si, že pokud má hra dopadnout stejně jako nulová, tak to musí být prohraná, tedy: $f(a) + f(b) + f(c) \in \mathcal{P}$. potřebuje dokázat, že když Levý začne pRavý vyhraje. Bůno L táhne do $f(a^L)+f(b)+f(c)$. $f(a^L)$ odpovídá $a^L \in \mathbb{Q}_{diad.}$ a všimneme si, že je to vždy číslo menší než $a$. Tím pádem $a^L+b+c < a+b+c = 0$. Nyní použijeme indukci. Z **(3)** a IP plyne že, $f(a^L) + f(b) + f(c) < f(0)$, tedy $\in \mathcal{R}$.

A také potřebujeme dokázat, že pokud pRavý začne, tak Levý vyhraje. To je ale symetrické.

Nyní dokážeme **(1)** a obdobně i **(3)**, která je symetrická. Dokažme $a + b + c > 0 \Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) > f(0)$, tedy $\in \mathcal{L}$ Když pRavý začne tak Levý vyhraje: pRavý táhne BÚNO do $f(a^R) + f(b) + f(c)$. Tedy $a^R > a \Rightarrow a^R + b + c > 0$. To dokážeme stejně indukcí jako v prvním případě.

Zbývá nám případ kdy Levý začne a Levý vyhraje. Pokud $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tak potom $a + b + c \geq 1$ BÚNO $f(a) > f(0), f(a^L) = a - 1$. Levý tedy bude táhnout do $f(a^L) + f(b) + f(c)$. $(a - 1) + b + c \geq 0$, tím pádem pRavý na tahu prohraje.

Pokud $a, b, c \in \mathbb{Q}_{diad.}$, ve tvaru $\frac{i}{2^j}, i$ liché, $j \geq 0, i > 0$ Některé z $a, b, c$ BÚNO $a = \frac{i'}{2^{j'}}$ pro $j' \geq j \wedge j' > 0$. Pokud by to nebyla pravda, tak vše $\in \mathbb{Z}$. Potom Levý táhne do $a^L$, $a^L = \frac{i'-1}{2^{j'}}$. A tedy $a^L + b + c = -\frac{1}{2^{j'}} + a + b + c \geq 0$, protože $a + b + c > 0$. (To je třeba dokázat, bude doplněno později.) A už jen použijeme IP $f(a^L) + f(b) + f(c) \geq f(0)$, tím pádem pRavý na tahu prohraje.

*Q.E.D.*

**Pozorování *6.1.3—Zlepšení lematu*:** *ve skutečnosti platí:*

**(1)** $a + b + c > 0 \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) > f(0)$

**(2)** $a + b + c = 0 \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) = f(0)$

**(3)** $a + b + c < 0 \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) < f(0)$

*Důkaz:* Dokážeme sporem z *chytrého lematu*. Pro **(1)**, pro ostatní by se to dělalo obdobně. Nechť $a + b + c \leq 0 \Leftarrow f(a) + f(b) + f(c) > f(0)$. Poté ale $f(a) + f(b) + f(c) \leq f(0)$ $\lightning$

*Q.E.D.*

**Věta *6.1.4*—*O homomorfismu*:** *zobrazení* $f : \mathbb{Q}_{diad.} \longrightarrow \mathbb{HRY}$ *je homomorfismem.*

*Důkaz:* Dokážeme že funkce $f$ zachovává operace $+$ a $-$. Tedy že platí následující $\forall a, b \in \mathbb{Q}_{diad.}$

Zachovávání oprerace $f(-a) = -f(a)$, jsme již dokázali minule.

Poté dokážeme $f(a) + f(b) = f(a + b)$. Z našeho *zlepšeného lemmatu* víme: $a + b = c \Leftrightarrow f(a) + f(b) = f(c)$. A tedy stačí pouze dosadit a vidíme $f(c) = f(c)$.

*Q.E.D.*

**Důsledek:** Od teď je tedy jedno, jestli budeme počítat s hrami jako s čísly, a až nakonec si pod čísly představíme hru, nebo jestli si budeme hru přsdstvovat od začátku. Takže od této chvíle budu v textu pro větší přehlednost vypouštět zobrazení $f$.

## Počítání číselných her

**Definice *6.2.1*—*incentive (pobídka, užitek)*:**

levý užitek v $G$ je $G^L - G$

pravý užitek v $G$ je $G - G^R$

**Věta *6.2.2*—*simplicity rule (pravidlo jednoduchosti, prostoty)*:** *pokud $G$ je ve tvaru $\{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$ a $\forall G^L \in \mathcal{G}^L, \forall G^R \in \mathcal{G}^R$ platí:*

**(1)** *Jsou to čísla.*

**(2)** $G^L < G^R$.

*Tak $G$ je také číslo a je to nejjednodušší číslo $x$, které splňuje $G^L < x < G^R$.*

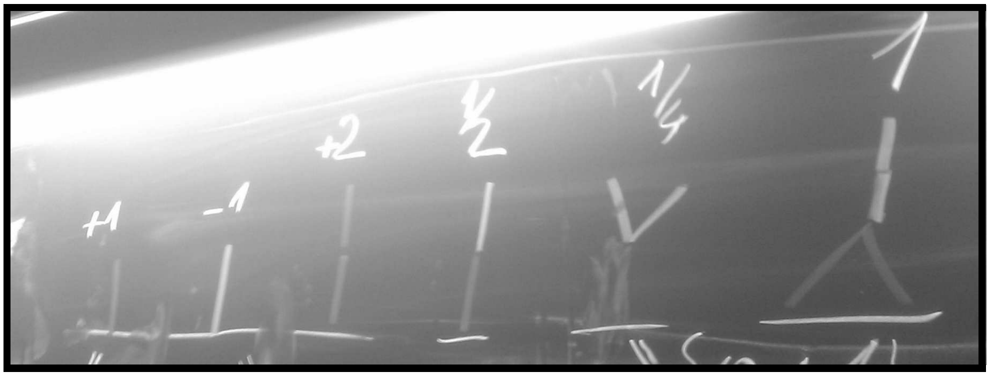
*Bez DK.* bude později.

Vyvstává samozřejmě otázka co znamená nejjednodušší. Nejjednodušší znamená celé číslo s nejmenší absolutní hodnotou nebo $\frac{i}{2^j} \in \mathbb{Q}_{diad.}, j > 0$ s co nejmenším jmenovatelem. Věta se dá zadefinovat i tak, že místo nejednodušší se řekne s nejmenšími narozeninami. Zde zase není jasné, jestli existuje pouze jedno číslo s nejmenšími narozeninami. Opět si to později dokážeme.

Také se nám může zdát zvláštní první podmínka. Vezměme si například hru $\{0|0\}$. Všimneme si, že nesplňuje druhou podmínku a tedy se na ní nedá použít simplicity rule. Později sti také dokážeme, že tato hra opravdu není žádné číslo a tedy, že jsme si pro ní rozumně zadefinovali, že $\{0|0\} = *$.

př: $\{1| - 1\}$ : platí $1 \not< -1$, věta nám nepomůže a později zjistíme, že to také není číslo.

př: $\{0|1\} = \frac{1}{2}$ použili jsme větu jelikož $0 < 1$.




Obrázek 1: příklady Hackenbush i s ohodnocením

př: $\{\frac{1}{2}|2\} = 1 = \{0|\}$

Další použití simplicity rule si ukážeme na hrách.

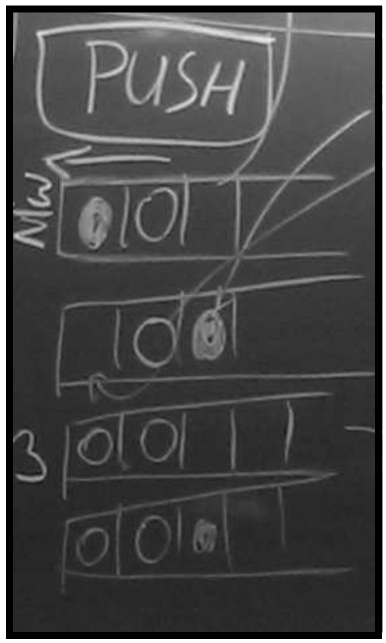
**Hackenbush (roští):** červeno-modrá varianta. Základní deska a na ní jsou přirostlé obrázky skládající se z červených a černých úseček. Hráči se střídají v tazích, každý může smazat pouze úsečku své barvy. Pokud však smaže poslední úsečku, co připojuje obrázek k základně, tak celý obrázek zmizí.

**Push:** Většinou se hraje s žetonky na šachovnici, ale ve skutečnosti nám stačí navzájem nezávislé řádky ve kterých jsou černé a bílé kameny. Vždy když je hráč na tahu, tak si vybere nějaký svůj kámen a posune jej doleva a s ním se posunou všechny další kameny, které stojí takovému posunutí v cestě. Poku se kámen dostane mimo políčka řádku, tak vypadává za hry.

Později si dokážme, že obě tyto hry mají všechny herní pozice rovny nějakému číslu a tedy se pro jejich analýzu velmi hodí *simplicity rule.*

---

V Praze dne 28. listopadu 2010 zapsal Tomáš Masařík. Verze 1.0




Obrázek 2: Push