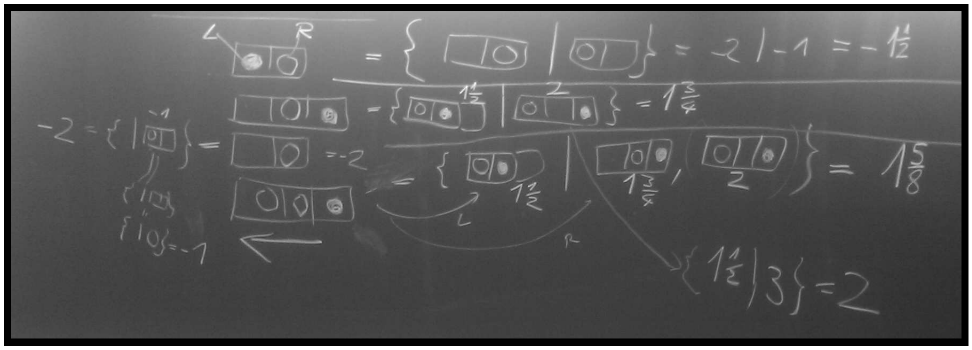
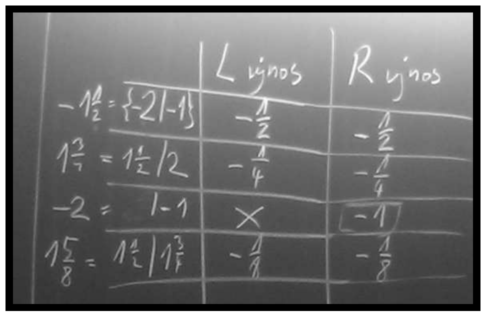


Obrázek 1: Push



Obrázek 2: **Incentive pro push** Pokud hraje Levý hráč, jen si pohorší. Pokud by byl na tahu pRavý, tak například tahem do prvního řádku by prohrál, protože výnos je menší, než hodnota samotné hry. Takže pRavému nezbyde nic jiného, než zahrát v posledním řádku.

Kombinatorická teorie her

přednáší Mgr. Robert Šámal, Ph.D. a Mgr. Tomáš Valla

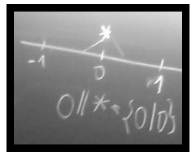
7 hodina: Zjednodušování her

pravidlo jednodchosti Když z *pravidla jednoduchosti* víme kdo vyhraje, tak jak má vlastně hrát? Vždy si vybereme takovou hru, která je nejzápornější (respektive nejkladnější) z hlediska incentive (výnosu).

Čím to může být těžké? Třeba tím, že hru nedokážeme převést na číslo.Například ve hře *hackenbush* je nalezení čísla NP-úplný problém a to i přesto, že každá pozice odpovídá nějakému číslu.

Naproti tomu pokud trochu modifikujeme pravidla hry *Push* tak, že pokud táhneme, poodtlačíme všechny kameny vedle sebe, tak poté známe formulku na získání čísla.

No a další svízel je, že nám nemusí vždy vycházet pouze číslo. Jak víme spousta



Obrázek 3: Osa ukazující neporovnatelnsot 0 a $*$

her nejsou čísla.

Nyní si dokážeme *Simplicity rule* z minulé přednášky

Důkaz: Chceme že $G - x \in \mathcal{P}$. Tedy, že je prohraná pro Levého, který začne.

$G^L - x < 0 \forall g^L \in G^L$, to platí z podmínky v zadání.

$G - x^R < 0$ a to dokážeme sporem. $G - x^R \geq 0$ tedy $G \geq x^R$. x^R má ale menší narozeniny než x. Tedy x^R nesplňuje podmínku $*$ a tedy $\exists G^R$ tž $x^R \geq G^R$ Ale víme $G^R - x^R \leq 0$ A my nyní ukážeme vyhrávající tah pRavého v předpokládané pozici, tedy tah do $G^R - x^R$. $\lightning$

Pro pRavého, který začne, je to analogické.

Q.E.D.

Lze také dokázat, že podmínky *nejjednodušší číslo* a *číslo s nejmenšími narozeninami* jsou ekvivalentní. Také existuje silnější varianty věty, kdy se nemusí jednat pouze o čísla a podmínky místo $\leq, \geq$ jsou $\lhd |, | \rhd$.

př: $*|1 = 0$ což lze použít protože $* \lhd |0 \lhd |1$.

Zjednodušování složitějších her

"One-hand-tied principle" (pravidlo jedné ruky zavázané) Zjednodušování her tak, že si hráč zakáže nějaké tahy, ale stejně i tak vyhraje. Samozřejmě poté tím spíš vyhraje obecnou hru.

Věty vycházející z "One-hand-tied principle":

Věta *7.2.1*—*Dominované tahy*: *když máme hru* $G = \{A, B, C, \ldots | H, I, J, \ldots\}$ *a* $A \leq B$*, pak* $G = G' = \{B, C, \ldots | H, I, J, \ldots\}$.

Levý se vlastně zaváže, že nebude hrát do pozice A a tím je dána podmínka $G \geq G'$ My ale musíme dokázat rovnost.

Důkaz: Stačí když dokážeme $G - G' \in \mathcal{P}$

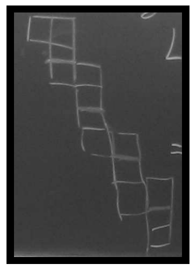
$$A, B, C ... | H, I, J ... + -H - I - J ... | - B, -C$$

Jediná možnost, jak by to nemuselo být prohrané pro prvního hráče je tah Levého do $A - G'$. Pravý táhne $A - B$ a to je ≤ 0, tedy Levý na tahu prohraje. Na ty ostaní je odpovědí zrcadlící strategie. Simetricky i pro tahy pRavého hráče. Pokud $H \geq I$, tak lze vynechat H.

Q.E.D.

Důsledek: Zbyde nám tam nakonec nějaká množina neporovnatelných prvků.

V Praze dne 16. prosince 2010 zapsal Tomáš Masařík. Verze 1.0



Obrázek 4: **Demonstrace "One-hand-tied principle"na hře domineering**: "normální"analýza by byla poměrně složitá. Pokud si levý hráč zakáže takové tahy, aby jeho dominová kostka přetnula jednu z červených čar a i přesto vyhraje, tak využitím *principu* získáme analýzu původní hry. Jenotlivé části známe jsou to hry $*$ a $-*$ a poslední je hra 1. Stačí už jen dokázat, že $* = -*(0|0 = * = -* = 0|0)$. A tak potom je součet $* + * + * + * + 1 = 1 > 0$ a tedy hra je vyhraná pro Levého hráče.