Kombinatorická teorie her

přednáší Mgr. Robert Šámal, Ph.D. a Mgr. Tomáš Valla

9 hodina: Úvod do pozičních her

Studiem pozičních her se zabývá Jószef Beck. Narozdíl od kombinatorických her jsou to hry které nejdou rozdělit na menší. př: příklad piškvorky 3^2 , což je, jak víme z herního stromu, remízová hra.

Herní zoo

Definice *9.1.1—Poziční hra*: Hra na sadě vrcholů, na které jsou definovány vyhrávající linie. Formálněji: Hypergraf $\mathcal{H} = (V, E)$, kde dva hráči střídavě obsazují vrcholy.

Nyní se podíváme na některé typy pozičních her.

Definice *9.1.2—Silná hra*: Nejklasičtější varianta jakou všichni známe třeba z piškvorek. Hráč který první obsadí nějakou hyperhranu ($F \in E$) vyhrává.

Definice *9.1.3—Inverzní hra*: Hráč který jako první obsadí vyhrávající linii prohrál.

Definice *9.1.4—Maker/Breaker (Stavitel/Ničitel) či Slabá hra*: Cílem prvního hráče (Stavitele) je vybudovat vyhrávající linii. Cílem druhého hráče (Ničitele) je aby stavitel nevyhrál.

Definice *9.1.5—Breaker/Maker*: Zde pouze začíná Breaker. Jinak role zůstávají stejné jako v předchozí variantě.

Ale většinou to kdo začíná je zajímavé jen pro malé hry či degenerované případy.

Definice *9.1.6—Picker/Chooser*: Chooser si vybere v plánu dva vrcholy a Picker si z těch 2 možností vybere jednu do které potáhne. Poté Chooser táhne do té druhé. Úkolem Picker je vybudovat vyhrávající linii a Chooser se mu to snaží překazit. (Stejně jako ve variantě Maker/Breaker.)

Definice *9.1.7—Chooser/Picker*: Opět stejné jako v předchozm případě, akorát tentokrát začíná Chooser.

Definice *9.1.8—Avoider/Enforcer (Vyhýbač/Donucovatel)*: Něco jako inverzní Maker/Breaker. Tedy Enforcer se snaží Avoidera donutit obsadit vyhrávající linii.

Definice *9.1.9—Enforcer/Avoider*: v této variantě začíná Enforcer, pravidla jsou totožná.

Silné a inverzní hry jsou hodně těžké, protože jediné čím se liší první a druhý hráč je jeden tah a to není mnoho. Ve slabých hrách se dají udělat i nějaké efektivní strategie. Oproti Silným hrám si zde druhý hráč (breaker) nemůže vynucovat tahy prvního hráče. Vzpomeňme si, že Breaker klidně může vytvořit linii a stejně nevyhraje. Ostatní varianty zde uvádíme pouze pro ukázku a k jejich detailní analýze se nedostaneme.

Silné hry

př: Piškvorky n^2 Jak je hrát? V každém řádku je dvojice stejných čísel a pokyn pro hráče: Táhni do opačného čísla. Tedy párujeme jako v první kapitole.

Pozorování *9.2.1*—5^2: *5^2 je remízová hra*

Pozorování *9.2.2*—n^2: *n^2 je remízová hra pro $n \geq 3$*

Důkaz:

Pro obecné $n > 5$ si to dokážeme indukcí. Vyrobíme si větší tabulku.

Pro $n = 4$ doplním později. Zajímavé je, že nejde použít párovací metoda jako pro vyší n, protože políček je 16, ale výherních pozic je 10 a na to bychom potřebovali umísit 20 párovacích čísel.

Pro $n = 3$ nechť si každý sám rozebere herní strom.

Q.E.D.

př: piškvorky n^d Vyhrávající linie jsou takové kde pro všechny souřadnice platí:

bud zůstávají konstatní.

nebo jdou od 1 do n.

či od n do 1.

Zakázané jsou ale vyhrávající linie, kde jsou všechny souřadnice konstatní.

Pozorování *9.2.3*—*Počet vyhrávajících linií*: *Vyhrávajících linií je* $\frac{(n+2)^d - n^d}{2}$.

Důkaz: Normální důkaz:

$$\frac{\textit{všechny posloupnosti} - \textit{konstatní}}{\textit{dvojité započítání}}$$

Mazácký důkaz: Obalíme si krychli krychlí o velikosti $n + 2$ a všimneme si kolik máme výherních pozic.

Q.E.D.

Některá fakta o piškvorkách n^d:

3^3 — vyhraje první. Je zajímavé, že dokonce neexituje žádná remízová pozice.

4^3 — také vyhraje první. Remízová pozice sice existuje, ale bylo to v 70. letech dokázáno rozborem případů.

5^3 — Otevřený problém. Věří se ale, že bude také remízová.

Hypotéza: n^d je remízová $\Leftrightarrow$ počet políček je větší než počet vyhrávajících linií.

Hypotéza: Okud je dimenze větší jak $n \Rightarrow$ první hráč vyhraje n^d.

Věta *9.2.4*—*Starategy steeeling*: *V každé silné poziční hře má první hráč neprohrávající strategii.*

Důkaz: Máme dvě možnosti. Pokud má První hráč vyhrávající strategii, tak jsem spokojení. Pokud První hráč nemá vyhrávající strategii, tak to ale znamená že Druhý hráč má neprohrávající strategii. Označme jí S. První hráč bude hrát tak, že nejdříve zahraje na libovolné místo a to si zapamatuje. Poté Druhý hráč použije S. Nyní však první hráč zapomene na to kam zahrál v prvním a vezme strategii S a podívá se kam by měl zahrát pokud by byl on druhým hráčem. S je neprohrávající a tedy První hráč také neprohraje. Jediné co zbývá je rozmyslet si, že pokud nám S napoví táhnout do zapamatovaného místa, tak my potáhneme jinam ale to jiné místo se stává naším zapamatovaným místem. A druhá věc kterou musíme je rozmyslet si, že nám v silných pozičních hrách nevadí pokud máme symbol navíc.

Q.E.D.

Důsledek: Pokdu se u nějaké silné poziční hry dozvíme, že neexistuje remízová pozice, tak díky větě o *Strategy steeling* vímeže taková hra je vyhraná pro Prvního hráče.

Tak se například daokázaly piškvorky 3^3.

V Praze dne 6. ledna 2011 zapsal Tomáš Masařík. Verze 1.0